

Descente de torseurs, gerbes et points rationnels

Stéphane Zahnd

February 1, 2008

Contents

Remerciements	V
Introduction	IX
Notations	XIX
1 Champs et gerbes	3
1.1 Sites et topoï	4
1.2 Torseurs	8
1.3 Bitorseurs	14
1.4 Préchamps et champs	17
1.5 Gerbes	23
1.6 Liens	29
1.7 Cohomologie à valeurs dans un lien	33
2 Descente de torseurs: le cas abélien	39
2.1 Conséquences de la suite spectrale de Leray	40
2.2 De l'importance de la condition $\bar{G}_X(\bar{X}) = \bar{G}(\bar{k})$	48
2.3 Points adéliques et torseurs	54
2.3.1 Construction de l'obstruction de Brauer-Manin	56
2.3.2 Exemples de calculs de $m_{\mathcal{H}, \mathbb{B}(\mathcal{X})}(X)$	59
2.3.3 Brauer-Manin orthogonalité et descente	61
3 Descente de torseurs: le cas non-abélien	65
3.1 Une interprétation topologique	66
3.2 Obstruction non-abélienne	73
3.3 Le cas fini	75
3.4 Remarques	76
3.4.1 Problèmes de représentabilité	76
3.4.2 La condition corps des modules et le champ $\pi_* \mathrm{Tors}(X, G_X)$	76
4 Obstruction de Brauer-Manin des gerbes	81
4.1 Rappels	82
4.1.1 Calcul de Br_a pour un espace homogène sous SL_n	82
4.1.2 Exemples	83
4.2 Interprétation en termes de champ quotient	84
4.3 Invariant de Brauer-Manin d'une k -gerbe	87
4.4 1/2-théorème de Tate-Poitou non-abélien	90

Bibliographie	94
Index	100
Glossaire des notations	100

Mathematics Subject Classification (2000). 14G05, 14A20, 14F20, 18G50.

Mots-clés. Points rationnels, (bi-)torseurs, champs, gerbes, cohomologie non-abélienne, obstruction de Brauer-Manin.

Remerciements

Les mots sont faibles pour exprimer ma reconnaissance à Jean-Claude DOUAI pour tout ce qu'il m'a apporté durant l'élaboration de cette thèse. Sa passion et sa soif de découvrir, peut-être plus encore que sa disponibilité de tous les instants et son impressionnante culture mathématique, ont transformé toutes nos discussions en véritables moments de bonheur. A ses côtés, la découverte des gerbes et de la cohomologie non-abélienne m'est apparue comme un fantastique voyage.

J'ai bien sûr été très honoré que Jean GIRAUD ait accepté la lourde tâche de rapporteur, et je tiens ici à le remercier d'avoir été aussi précis et consciencieux dans ses observations. Le présent texte porte la trace de son magnifique ouvrage sur la cohomologie non-abélienne, et de ses commentaires très riches et détaillés sur mon travail.

Le temps que David HARARI a eu la gentillesse de bien vouloir me consacrer, les indications et explications précises qu'il m'a fournies sur les questions arithmétiques en général et sur l'obstruction de Brauer-Manin en particulier, m'ont permis d'enormément progresser dans la compréhension de ces problèmes. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je tiens à remercier chaleureusement Pierre DÈBES, pour les conseils et encouragements qu'il m'a prodigués tout au long de ce travail. J'ai beaucoup appris sur les revêtements (entre autres) à son contact, et nos discussions ont toujours été, sur de nombreux sujets, très éclairantes.

Je remercie Michel EMSALEM de m'avoir consacré tant de temps, et d'avoir accepté de se pencher avec moi sur des problèmes aussi effrayants (ah! le *gr*-champ des auto-équivalences de la gerbe des G -torseurs...). Manipuler les catégories fibrées et les champs me paraît plus facile grâce à ses indications.

Le cours de DEA de Géométrie Algébrique de Dimitri MARKUSHEVICH m'a donné le goût de cette discipline et du travail bien fait, et c'est pourquoi je souhaite ici lui dire avec reconnaissance: *бесконечно спасибо*.

La théorie des champs occupe une place importante dans ce travail. Je tiens donc à remercier chaleureusement Laurent MORET-BAILLY de m'avoir fait l'honneur d'accepter de faire partie de ce jury. Ses travaux dans ce domaine apportent à de nombreux endroits de la présente thèse un éclairage particulièrement intéressant.

Je tiens à remercier ma famille de son soutien inconditionnel durant ces trois années. Evidemment, je m'adresse tout d'abord à Sophie, pour avoir supporté sans sourciller mes envies de solitude, et pour avoir accepté que je me plonge de longues soirées dans la lecture des "grands classiques".

Je remercie Valerio VASSALLO, qui m'a enseigné les fondements de la Géométrie Algébrique, et dont les idées m'ont permis d'aiguiser mon intuition et mon désir d'aller plus loin dans ce domaine.

Enfin, je ne veux à aucun prix oublier mes amis: vos encouragements (en particulier ces dernières semaines), et les conversations que nous avons eues ensemble, que ce soit devant un tableau noir, autour d'un café ou sur une aire d'autoroute quelque part en Allemagne, m'ont aidé à conserver intacte ma motivation. Séverine (la mise en page de cette thèse porte ta signature!), mes "compagnons autrichiens" Yann et Salah, mes camarades de jeu en cohomologie étale Ben et Diallo, c'est un plaisir de vous associer à ces remerciements.

Mais, si vous en croyez tout le monde savant,
L'esprit doit sur le corps prendre le pas devant,
Et notre plus grand soin, notre première instance,
Doit être à le nourrir du suc de la science.

Molière, *Les femmes savantes*, (*Acte II, Scène VII*).

Introduction

La question qui motive ce travail est la suivante:

Soient k un corps et X un k -schéma. X possède-t-il des points k -rationnels?

Il semble évidemment sans espoir de répondre entièrement à ce problème, puisque cela équivaudrait à prouver d'un seul coup tous les énoncés du type “Théorème de Fermat” possibles et imaginables. L'objectif plus raisonnable que nous nous fixons ici est le suivant:

Soient k un corps de caractéristique nulle et X un k -schéma. Déterminer des obstructions cohomologiques étales à l'existence de points k -rationnels sur X .

Pour arriver à nos fins, nous utilisons les gerbes, introduites par Grothendieck et Giraud, mais fort peu utilisées depuis (sauf peut-être par les Physiciens, qui se servent des gerbes abéliennes en théorie des cordes, cf. [Hi03]), ce qui nous semble être une flagrante injustice. En effet, les gerbes apparaissent naturellement dans des problèmes aussi nombreux que variés, et dont nous donnons maintenant quelques exemples, en commençant par celui qui est au cœur de cet exposé:

Problème central: soient k un corps de caractéristique nulle, X un k -schéma géométriquement connexe, et G un k -groupe algébrique linéaire. Soient encore:

$$\bar{P} \longrightarrow \bar{X} = X \otimes_k \bar{k}$$

un \bar{G}_X -torseur, où:

$$G_X = G \times_{\text{Spec } k} X \quad \text{et} \quad \bar{G}_X = G_X \times_X \bar{X}.$$

et \bar{k} désigne une clôture algébrique de k fixée à l'avance. On suppose que pour tout $\sigma \in \text{Gal}(\bar{k}/k)$, il existe un isomorphisme de \bar{G}_X -torseurs:

$$\varphi_\sigma : {}^\sigma \bar{P} \longrightarrow \bar{P}$$

où ${}^\sigma \bar{P}$ désigne le schéma obtenu par pullback à partir de $\tilde{\sigma}$ (l'automorphisme de $\text{Spec } \bar{k}$ induit par σ); autrement dit, le carré ci-dessous est cartésien:

$$\begin{array}{ccc} {}^\sigma \bar{P} & \xrightarrow{\varphi_\sigma} & \bar{P} \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \text{Spec } \bar{k} & \xrightarrow{\tilde{\sigma}} & \text{Spec } \bar{k} \end{array}$$

Employant une terminologie propre à la théorie des revêtements, nous dirons que le torseur $\bar{P} \rightarrow \bar{X}$ est de *corps des modules* k .

Le problème est alors de savoir s'il existe un G_X -torseur $Q \rightarrow X$ tel que $\bar{Q} \approx \bar{P}$, ce dernier isomorphisme vivant dans la catégorie des \bar{G}_X -torseurs sur \bar{X} . Nous appellerons *modèle* de \bar{P} sur X un tel torseur $Q \rightarrow X$. Si \bar{P} possède un modèle sur X , nous dirons qu'il est *défini sur* k .

Supposons par exemple que G soit un k -groupe abélien de type multiplicatif, et que X soit un k -schéma propre (*e.g.* une k -variété projective). Alors la suite exacte à 5 termes:

$$0 \longrightarrow H^1(k, G) \longrightarrow H^1(X, G_X) \xrightarrow{u} H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)^\Gamma \xrightarrow{\delta^1} H^2(k, G) \longrightarrow H^2(X, G_X) \quad (1)$$

(où Γ désigne le groupe de Galois absolu de k) déduite de la suite spectrale de Leray:

$$E_2^{p,q} = H^p(k, R^q \pi_* G_X) \implies H^{p+q}(X, G_X) = E^{p+q}$$

montre que l'obstruction à ce que \bar{P} (qui représente une classe dans $H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)^\Gamma$) soit défini sur k (*i.e.*: $[\bar{P}] \in \text{im } u$) est mesurée par une classe vivant dans $H^2(k, G)$. Une telle classe est une (classe d'équivalence de) gerbe sur le site étale de k .

Par ailleurs, sous les mêmes hypothèses, on a une interprétation en termes de *type* de ce problème. On dispose en effet de la suite exacte à 5 termes introduite par Colliot-Thélène et Sansuc dans [CTS87]:

$$H^1(k, G) \longrightarrow H^1(X, G_X) \xrightarrow{\chi} \text{Hom}_\Gamma(\widehat{G}, \text{Pic } \bar{X}) \xrightarrow{\partial} H^2(k, G) \longrightarrow H^2(X, G_X) \quad (2)$$

celle-ci étant déduite de la suite spectrale:

$$E_2^{p,q} = \text{Ext}_\Gamma^p(\widehat{G}, H^q(\bar{X}, \mathbb{G}_{m, \bar{X}})) \implies H^{p+q}(X, G) = E^{p+q}$$

Les suites exactes (1) et (2) sont canoniquement isomorphes (*cf.* [HS02]). On appelle type d'un G_X -torseur $P \rightarrow X$ l'image de $[P]$ par le morphisme χ de la suite (2). Plus généralement, on peut associer à tout \bar{G}_X -torseur $\bar{P} \rightarrow \bar{X}$ un type noté $\tau_{\bar{P}}$, appartenant *a priori* à $\text{Hom}(\widehat{G}, \text{Pic } \bar{X})$; si de plus \bar{P} est de corps des modules k , alors $\tau_{\bar{P}}$ est Γ -équivariant (*cf.* [HS02] 3.7). Dans ce cas, l'existence d'un modèle pour le \bar{G}_X -torseur $\bar{P} \rightarrow \bar{X}$ est équivalente à l'existence d'un G_X -torseur sur X de type $\tau_{\bar{P}}$.

Un problème très similaire est celui de l'existence de modèles pour un revêtement galoisien:

“Revêtements algébriques: corps des modules contre corps de définition”:¹ soient X une variété algébrique définie sur un corps K , et soit K^{sep} une clôture séparable de K . Soient G un groupe fini, et $\bar{f} : \bar{Y} \rightarrow \bar{X}$ un G -revêtement. On suppose que \bar{f} est isomorphe à tous ses conjugués par l'action de $\text{Gal}(K^{sep}/K)$.

Le G -revêtement \bar{f} est-il défini sur K ?

Une situation légèrement différente des deux précédentes est liée à ce que nous convenons d'appeler la

¹Titre honteusement plagié sur [DD97].

Conjecture de Grothendieck sur les groupes de Brauer: soit X un schéma. Notons $\mathrm{Br}_{A_Z}X$ le groupe des classes d'équivalence d'algèbres d'Azumaya sur X (*cf.* [Gr68]), et notons $\mathrm{Br} X$ la partie de torsion du second groupe de cohomologie étale $H^2(X, \mathbb{G}_m)$ (lorsque X est régulier, on a: $\mathrm{Br} X = H^2(X, \mathbb{G}_m)$ d'après [Gr68] II.1.4). On a toujours un morphisme injectif de groupes:

$$\Delta : \mathrm{Br}_{A_Z}X \longrightarrow \mathrm{Br} X$$

La surjectivité de ce morphisme n'est pas connue en général, mais elle l'est dans le cas où X est:

- le spectre d'un corps;
- un schéma affine, ou la réunion de deux schémas affines ayant une intersection affine (Gabber [Ga80]);
- une variété abélienne (Hoobler [Ho72]);
- une variété torique lisse (Demeyer et Ford [DF93]);
- une surface algébrique séparée géométriquement normale (Schröer [Sc01]);

Le problème de déterminer si Δ est surjective ou non est évidemment lié aux gerbes. Considérons en effet une classe $[c] \in \mathrm{Br} X$; comme $[c]$ est de torsion, il existe un entier n tel que $[c]$ soit représentable par une classe $[c'] \in H^2(X, \mu_n)$. Un représentant de $[c']$ est une μ_n -gerbe sur le site étale de X (au passage, \mathcal{G} est en particulier un champ de Deligne-Mumford), et \mathcal{G} appartient à l'image de Δ si et seulement si \mathcal{G} est isomorphe à un champ quotient (*cf.* [EHKV01] 3.6).

Ce sont les mêmes types de considérations qui interviennent lorsque l'on étudie la

Relation de domination de Springer: soient K un corps, K^{sep} une clôture séparable de K , G un K -groupe algébrique, et H un sous- K -groupe algébrique de G . Il existe une relation [Sp66]:

$$H^1(\mathrm{Gal}(K^{sep}/K), G) \rightharpoonup H^1(\mathrm{Gal}(K^{sep}/K); G, H)$$

entre l'ensemble des classes d'isomorphie de G -torseurs (à droite) sur K , et celui des K -espaces homogènes sous l'action (à droite) de G avec isotropie H . Soit V un tel espace homogène. Une fois encore, l'obstruction à ce que V soit dominé par un G -torseur, *i.e.* l'obstruction à ce que $[V]$ appartienne à l'image de la relation est mesurée par une gerbe sur k , localement liée par H .

Le dernier exemple que nous donnons se distingue des précédents par le fait que c'est purement un problème de Géométrie Algébrique, et non un problème d'Arithmétique.

Ceci étant dit, même si les contextes sont différents, les gerbes sont encore présentes:

Classe de Chern d'un fibré en droites: soient X une variété algébrique complexe projective lisse. On note X^{an} la variété analytique canoniquement associée à X (*cf.* [Fu98]). De la suite exponentielle, on déduit la suite de cohomologie:

$$H^1(X^{an}, \mathcal{O}_{X^{an}}) \xrightarrow{\exp} H^1(X^{an}, \mathcal{O}_{X^{an}}^*) \xrightarrow{\delta^1} H^2(X^{an}, \mathbb{Z})$$

D'après le théorème de Serre (*cf.* [Hart77] p.440), qui établit l'équivalence entre la catégorie des faisceaux cohérents sur X et celle des faisceaux analytiques cohérents sur X^{an} , on en déduit la suite exacte:

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\eta} \text{Pic } X \xrightarrow{\delta^1} H^2(X^{an}, \mathbb{Z})$$

L'image d'un fibré en droites \mathcal{L} sur X (*i.e.* d'un représentant d'une classe de $\text{Pic } X$) par δ^1 est appelée la *classe de Chern* de \mathcal{L} , et elle est notée $c_1(\mathcal{L})$.² On peut évidemment voir cette classe $c_1(\mathcal{L})$ comme une gerbe, sur le site analytique de X^{an} . Sa non-nullité est une obstruction à ce que \mathcal{L} appartienne à l'image du morphisme η .

Après ces exemples qui illustrent la diversité des contextes dans lesquels les gerbes interviennent, voici le plan que nous suivrons dans ces notes:

CHAPITRE 1: nous y introduisons les outils et le langage nécessaires dans toute la suite. On commence par rappeler la définition de site en général, en ayant à l'esprit le fait que seule la notion de site étale d'un schéma nous sera vraiment utile. On rappelle ensuite les notions de catégorie fibrée, préchamp et champ afin de pouvoir présenter les actrices principales de ce travail: les gerbes. Cependant, plutôt que de travailler sur un site général (comme dans [Gi66] et [Gi71]), nous étudierons plus particulièrement les propriétés des gerbes sur le site étale d'un schéma, ce qui rendra peut-être plus facile leur interprétation. Enfin nous rappellerons les notions de lien et de cohomologie à valeurs dans un lien, en donnant des exemples de situations où le H^2 est "facilement" calculable.

CHAPITRE 2: nous nous attaquons au problème central par son versant le plus facile: le cas abélien. Plus précisément, on s'intéresse à la situation suivante: on considère un corps de caractéristique nulle k , dont on fixe une clôture algébrique \bar{k} , un k -schéma X géométriquement irréductible, et un k -groupe algébrique abélien G . On peut alors, en ajoutant de peu contraintes hypothèses, déterminer une obstruction cohomologique abélienne à l'existence d'un point k -rationnel sur X . Explicitement, on suppose satisfaite la condition $\bar{G}_X(\bar{X}) = \bar{G}(\bar{k})$ (*e.g.* X projectif et $G = \mathbb{G}_m$). On a alors la suite exacte à 5 termes:

$$H^1(k, G) \longrightarrow H^1(X, G_X) \xrightarrow{u} H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)^\Gamma \xrightarrow{\delta^1} H^2(k, G) \xrightarrow{v} H^2(X, G_X)$$

²Ce n'est pas la seule manière de définir la classe de Chern d'un fibré en droites. C'est en tout cas celle présentée dans [Fu98], 19.3.1; pour un autre point de vue, nous renvoyons à l'appendice A de [Hart77], et pour un retour aux sources à [Gr58].

L'existence d'un point k -rationnel sur X entraîne l'existence d'une rétraction de l'application v , ce qui force le cobord δ^1 à être nul, cette nullité entraînant la surjectivité de l'application u . On en déduit donc une première obstruction:

Théorème 1 (Obstruction abélienne à l'existence d'un point rationnel). Soient k un corps de caractéristique nulle, X un k -schéma, quasi-compact et quasi-séparé, et G un k -groupe algébrique abélien tels que $\bar{G}_X(\bar{X}) = \bar{G}(\bar{k})$.

Si $X(k) \neq \emptyset$, alors dans la suite exacte précédente, le morphisme u est surjectif. Autrement dit, tout \bar{G}_X -torseur sur \bar{X} de corps des modules k est défini sur k .

De cet énoncé, on extrait les conséquences suivantes:

Proposition 2. Le corps k , le schéma X et le groupe G étant comme indiqués dans l'énoncé précédent, on a la suite longue de cohomologie (toujours déduite de la suite spectrale de Leray):

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^1(k, G) \longrightarrow H^1(X, G_X) &\xrightarrow{u} H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)^\Gamma \xrightarrow{\delta^1} H^2(k, G) \\ &\xrightarrow{v} H^2(X, G_X)^{tr} \longrightarrow H^1(k, H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)) \xrightarrow{\delta^2} H^3(k, G) \end{aligned}$$

où $H^2(X, G_X)^{tr} = \ker \{H^2(X, G_X) \rightarrow H^2(\bar{X}, \bar{G}_X)\}$. Supposons que X possède un point k -rationnel. Alors:

(i) les suites:

$$0 \longrightarrow H^1(k, G) \longrightarrow H^1(X, G_X) \xrightarrow{u} H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)^\Gamma \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow H^2(k, G) \xrightarrow{v} H^2(X, G_X)^{tr} \longrightarrow H^1(k, H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)) \longrightarrow 0$$

sont exactes;

(ii) le morphisme $H^3(k, G) \longrightarrow H^3(X, G_X)$ est injectif (c'est l'edge: $E_2^{3,0} \rightarrow E^3$).

Dans le cas particulier où $G = \mathbb{G}_{m,k}$, on a alors:

(\mathbb{G}_m -i) tout fibré en droites sur \bar{X} de corps des modules k est défini sur k ;

(\mathbb{G}_m -ii) la suite :

$$0 \longrightarrow \text{Br } k \longrightarrow \text{Br}^{tr} X \longrightarrow H^1(k, \text{Pic } \bar{X}) \longrightarrow 0$$

est exacte;

(\mathbb{G}_m -iii) le morphisme $H^3(k, \mathbb{G}_m) \longrightarrow H^3(X, \mathbb{G}_{m,X})$ est injectif.

Signalons que ce résultat est connu de longue date, puisqu'à peu de choses près, l'énoncé de cette proposition est celui du lemme 6.3 de [Sa81]. Notons aussi que la condition $\bar{G}_X(\bar{X}) = \bar{G}(\bar{k})$ est remplie, lorsque G est de type multiplicatif, si X est tel que $\bar{k}[X]^* = \bar{k}^*$. Les k -variétés satisfaisant cette dernière condition constituent d'ailleurs, pour citer Skorobogatov “une classe raisonnable de variétés pour lesquels les méthodes de descente fonctionnent bien” (*cf.* [Sk99] p.407). Cependant, toutes les variétés ne satisfont pas cette condition, et il est très instructif de regarder ce qui arrive sur un exemple (dû à J.-L. Colliot-Thélène et O. Gabber) de variété pour laquelle l’obstruction abélienne ne tient pas. Plus précisément, nous étudions une variété X , telle que $\bar{k}[X]^* = \bar{k}^* \oplus \mathbb{Z}$, possédant un point k -rationnel, mais telle que le morphisme:

$$\mathrm{Pic} X \longrightarrow (\mathrm{Pic} \bar{X})^\Gamma$$

n'est pas surjectif.

Il est également intéressant de remarquer que l'absence de point rationnel n'est pas une obstruction à la descente des torseurs en général³. Concrètement, d'après [CTS87], la descente des \bar{G}_X -torseurs (G étant abélien) sur \bar{X} est possible dès que X possède des points adéliques d'un certain type (ce qui est plus faible que de demander l'existence de points rationnels). Nous verrons que les variétés dont l'obstruction de Brauer-Manin est nulle ont justement des points adéliques de ce type.

CHAPITRE 3: l'objet de ce chapitre est de s'inspirer du cas abélien pour obtenir une obstruction non-abélienne à l'existence de point rationnel. Bien entendu, il n'est plus question d'utiliser des suites spectrales, et il ne subsiste de la suite exacte à 5 termes (1) que la suite exacte au sens des ensembles pointés:

$$0 \longrightarrow H^1(k, \pi_* G_X) \longrightarrow H^1(X, G_X) \xrightarrow{u} H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)^\Gamma$$

Pour espérer prolonger cette suite et obtenir un analogue de la suite à 5 termes dans le cas non-abélien, on définit, pour tout $\bar{P} \rightarrow \bar{X}$ représentant une classe dans $H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)^\Gamma$ sa gerbe des modèles, notée $D(\bar{P})$. C'est une gerbe sur k , dont la neutralité est nécessaire et suffisante pour que \bar{P} soit défini sur k (ou encore pour que \bar{P} ait un modèle sur X). La difficulté est évidemment que cette gerbe ne représente en général pas une classe de “ $H^2(k, G)$ ”, ni même de $H^2(k, \text{lien } G')$, où G' serait une k -forme de G . Le lemme suivant, qui est trivial mais d'une importance capitale, explique en partie l'origine de cette difficulté:

Lemme fondamental 3. *Soient S un schéma, G_S un schéma en groupes sur S , et P un G_S -torseur sur S . Alors $\mathrm{ad}_{G_S}(P)$ est une S -forme intérieure de G_S ; autrement dit:*

$$\mathrm{ad}_{G_S}(P) \text{ représente une classe de } H^1(S, \mathrm{Int } \, G_S).$$

En particulier, si G_S est abélien, alors:

$$\mathrm{ad}_{G_S}(P) \approx G_S$$

³I.e. la réciproque du théorème 1 est fausse en général.

Malgré cela, nous montrons que l'existence d'un point k -rationnel x sur X entraîne justement la neutralité de $D(\bar{P})$, lorsque l'on fait l'hypothèse supplémentaire:

Condition $(\star_{\bar{P}})$: En notant $G' = \text{ad}_{G_{\bar{X}}}(\bar{P})$ et \bar{x} un point géométrique associé au point k -rationnel x , on a:

$$H^0(\bar{X}, G') = H^0(\bar{k}, G'_{\bar{x}})$$

qui est l'analogue non-abélien de la condition:

$$\bar{G}_X(\bar{X}) = \bar{G}(\bar{k})$$

Sous cette hypothèse, on a le résultat suivant:

Théorème 4. Soient X un k -schéma, et G un k -groupe linéaire, et $\bar{P} \rightarrow \bar{X}$ un $G_{\bar{X}}$ -torseur de corps des modules k . On suppose que X possède un point k -rationnel x , et on suppose satisfaite la condition suivante:

Condition $(\star_{\bar{P}})$: En notant $G' = \text{ad}_{G_{\bar{X}}}(\bar{P})$ et \bar{x} un point géométrique associé au point k -rationnel x , on a:

$$H^0(\bar{X}, G') = H^0(\bar{k}, G'_{\bar{x}})$$

Alors $\bar{P} \rightarrow \bar{X}$ est défini sur k .

D'autre part, de nombreux obstacles se présentent lorsque l'on cherche à obtenir des informations précises sur le lien de la gerbe des modèles d'un torseur. Cependant, dans le cas où le groupe G est fini, on retrouve l'énoncé suivant, à rapprocher de celui de Harari et Skorobogatov [HS02], théorème 2.5 et section 3.1:

Théorème 5. Soient k un corps de caractéristique nulle, X un k -schéma géométriquement connexe, et G un k -groupe fini. Si $X(k) \neq \emptyset$, alors tout \bar{G}_X -torseur sur \bar{X} de corps des modules k est défini sur k .

Enfin, nous essayons d'expliquer ce qui empêche d'obtenir une description précise du lien de $D(\bar{P})$, et ce qui empêche donc *a priori* de raffiner les énoncés précédents. Nous étudierons aussi ce qui se passe si l'on n'impose plus la condition corps des modules sur les torseurs que l'on cherche à descendre. Précisément, on peut toujours associer à un torseur \bar{P} sur \bar{X} représentant une classe dans $H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)$ sa gerbe des modèles, mais celle-ci n'est plus nécessairement une k -gerbe. De fait, c'est une $k_{\bar{P}}$ -gerbe, où $k_{\bar{P}}$ désigne le corps des modules⁴ de \bar{P} . Le torseur \bar{P} représente un point $\xi_{\bar{P}}$ du k -champ $\pi_* \text{Tors}(X, G_X)$ obtenu à partir de la gerbe des G_X -torseurs sur X par image directe via le morphisme structural $\pi : X \rightarrow \text{Spec } k$. Ce champ joue le rôle de champ des modules grossiers pour les \bar{G}_X -torseurs sur \bar{X} , et on a une interprétation en termes de gerbe résiduelle pour $D(\bar{P})$. En utilisant la terminologie de Giraud, on peut également interpréter $D(\bar{P})$ comme une

⁴C'est la plus petite extension étale L de k telle que:

$${}^\sigma \bar{P} \approx \bar{P}, \quad \forall \sigma \in \text{Gal}(\bar{k}/L).$$

section au-dessus de l'ouvert ($\text{Spec } k_{\bar{P}} \rightarrow k$) du faisceau des sous-gerbes maximales du k -champ $\pi_* \text{Tors}(X, G_X)$. Nous essayons d'expliquer le lien entre ces deux façons d'aborder les choses. Il nous semble que le diagramme commutatif ci-dessous résume assez bien la situation:

$$\begin{array}{ccc} D(\bar{P}) & \xhookrightarrow{i} & \pi_* \text{Tors}(X, G_X) \\ \pi \downarrow & & \downarrow [\bullet] \\ \text{Spec } k_{\bar{P}} & \xrightarrow{[\bar{P}]} & R^1 \pi_* G_X \end{array}$$

Dans ce diagramme, on a noté:

- $\pi : D(\bar{P}) \rightarrow \text{Spec } k_{\bar{P}}$ le morphisme structural de la gerbe des modèles de \bar{P} ;
- $i : D(\bar{P}) \rightarrow \pi_* \text{Tors}(X, G_X)$ désigne le monomorphisme canonique (rendu explicite dans le chapitre 3);
- $[\bullet] : \pi_* \text{Tors}(X, G_X) \rightarrow R^1 \pi_* G_X$ est défini en envoyant une section du champ $\pi_* \text{Tors}(X, G_X)$, i.e. un G_{X_L} -torseur $T_L \rightarrow X_L$ sur sa classe d'isomorphie $[T_L]$;
- enfin, le choix de \bar{P} donne naissance à un point de $R^1 \pi_* G_X$ à valeurs dans $\text{Spec } k_{\bar{P}}$; c'est ce point que nous avons noté $[\bar{P}]$.

CHAPITRE 4: les espaces homogènes sur un corps sont un exemple de variétés pour lesquelles l'existence de points rationnels a été et est encore particulièrement étudié; un problème source de nombreuses activités est celui de la validité du principe de Hasse. Plus précisément, il serait intéressant de savoir si l'obstruction de Brauer-Manin est la seule pour les espaces homogènes sous l'action d'un groupe linéaire G avec isotropie H . D'après Sansuc [Sa81], on sait déjà que c'est le cas pour les torseurs sous des groupes connexes (i.e. G connexe et $H = \{1\}$), et d'après Borovoï [Bo96] c'est aussi le cas pour des espaces homogènes sous des groupes connexes avec isotropie connexe, ou pour des espaces homogènes sous des groupes simplement connexes avec isotropie abélienne finie.

Pour fixer les idées, considérons un corps de nombres k , et H un sous-groupe de SL_n . L'obstruction à ce qu'un k -espace homogène V sous SL_n avec isotropie H possède un point k -rationnel est mesurée par une gerbe \mathcal{G} sur k , localement liée par H ; la neutralité de \mathcal{G} (i.e. l'existence d'un point k -rationnel sur \mathcal{G}) est équivalente à l'existence d'un point k -rationnel sur V . Or la même gerbe \mathcal{G} peut correspondre à plusieurs espaces homogènes. D'où l'idée, dans un souci d'économie, de travailler directement avec les gerbes plutôt qu'avec les espaces homogènes.

Dans ce chapitre, fruit d'un travail en commun avec Jean-Claude Douai et Michel Emsalem, on commence donc par définir l'obstruction de Brauer-Manin d'une gerbe⁵. On montre que pour tout k -espace homogène V sous SL_n (ou n'importe quel autre groupe semi-simple simplement connexe) avec isotropie finie, on a:

$$m_{\mathcal{H}}(V) = m_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}_V)$$

⁵Pour des raisons techniques, on doit considérer des gerbes qui sont des champs de Deligne-Mumford, ce qui n'est pas gênant dans nos applications, puisque le cas intéressant est justement celui où l'isotropie est finie.

où \mathcal{G}_V est la gerbe des trivialisations de V (pour faire le lien avec les travaux de Springer, c'est aussi l'obstruction à ce que V soit dominé par un k -torseur sous SL_n ; mais un tel torseur est toujours trivial). On obtient, grâce à cette obstruction, une nouvelle interprétation du théorème de Tate-Poitou (quand H est abélien fini), et un “demi-théorème de Tate-Poitou” lorsque H est non-abélien fini.

Notations

Etant donné un corps k , nous appellerons *k -groupe algébrique* un k -groupe algébrique linéaire, et *k -groupe algébrique réductif* un k -groupe algébrique réductif et connexe.

Pour tout corps k et tout k -schéma Y , nous noterons $Y(k)$ l'ensemble des points k -rationnels de Y . Pour toute extension L de k , $Y(L)$ désignera l'ensemble des points de Y à valeurs dans $\text{Spec } L$.

Si Y est un schéma et G un schéma en groupes (*resp.* un schéma en groupes abéliens) sur Y , nous noterons $H^0(Y, G)$ et $H^1(Y, G)$ (*resp.* $H^i(Y, G)$, $i \geq 0$) les ensembles (*resp.* les groupes) de cohomologie étale $H_{\text{ét}}^0(Y, G)$ et $H_{\text{ét}}^1(Y, G)$ (*resp.* $H_{\text{ét}}^i(Y, G)$, $i \geq 0$), où G est identifié au faisceau de groupes qu'il représente sur le site étale de Y .

Soient k un corps de caractéristique nulle, \bar{k} une clôture algébrique de k , $\Gamma = \text{Gal}(\bar{k}/k)$, $\pi : X \rightarrow \text{Spec } k$ un k -schéma, et G un k -groupe algébrique. Soit encore $\bar{P} \rightarrow \bar{X}$ un \bar{G}_X -torseur ($\bar{G}_X = (G \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } \bar{k}) \times_{\text{Spec } \bar{k}} \bar{X}$). Nous dirons que ce torseur est de *corps des modules* k lorsque $\bar{P} \rightarrow \bar{X}$ représente une classe de $H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)^{\Gamma}$ (notons que cette appellation représente un abus par rapport à la définition usuelle de corps des modules dans la théorie des revêtements; avec celle-ci en effet, la condition $[\bar{P}] \in H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)^{\Gamma}$ assure seulement que le corps des modules de $\bar{P} \rightarrow \bar{X}$ est *inclus* dans k).

Lorsque \mathcal{C} est une catégorie, nous noterons $\text{Ob}(\mathcal{C})$ la classe de ses objets. Etant donnés deux objets A et B de \mathcal{C} , nous noterons $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ la classe des morphismes (ou des flèches) de \mathcal{C} entre A et B . Si de plus \mathcal{C} est un groupoïde, $\text{Isom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ désignera la classe des isomorphismes de \mathcal{C} entre A et B . Nous conviendrons que la catégorie vide est un groupoïde. Enfin, nous noterons **Ens** (*resp.* **Gr**, *resp.* **Ab**, *resp.* $FAGR(Y)$, *resp.* $FAGRA(B)$) la catégorie des ensembles (*resp.* des groupes, *resp.* des groupes abéliens, *resp.* des faisceaux de groupes sur le site étale de Y , *resp.* des faisceaux de groupes abéliens sur le site étale de Y).

Chapter 1

Champs et gerbes

Dans ce chapitre, nous rappelons les notions de site et de topos, qui fournissent une généralisation de la notion d'espace topologique. Cette généralisation permet comprendre pourquoi les problèmes évoqués dans l'introduction (descente de torseurs ou de revêtements, banalisation d'une algèbre d'Azumaya,...) sont de même nature, dans le sens où on peut tous les interpréter comme des problèmes de recollement, moyennant le choix d'un site idoine.

Notons tout de suite que nous nous réduirons très vite en pratique au site étale d'un schéma (qui sera d'ailleurs souvent le site étale d'un corps). Cette restriction est motivée d'une part par le fait que notre problème central apparaît naturellement comme un problème de descente sur le site étale d'un corps, et d'autre part parce que la manipulation des champs et des gerbes est assez délicate et lourde sur des sites généraux.

On dispose sur les sites (et sur les topoï, qui sont des sites particuliers) des mêmes objets et outils que sur les espaces topologiques. En particulier, on a une notion de faisceau, et la deuxième section est consacrée à l'étude de faisceaux particuliers: les torseurs (sur le site étale d'un schéma), qui jouent un des premiers rôles dans ce travail. Les exemples de torseurs sont nombreux “dans la nature”, aussi bien en Géométrie Algébrique (*e.g.*: les fibrés vectoriels de rang n sur une variété algébrique X “sont” les $GL_{n,X}$ -torseurs¹ sur le site de Zariski de X) qu'en Arithmétique (*e.g.*: les algèbres simples centrales d'indice n sur un corps K “sont” les PGL_n -torseurs sur le site étale de K). Après avoir rappelé quelques-unes de leurs propriétés, nous constaterons avec dépit le manque de structure de l'ensemble des classes d'isomorphie de G -torseurs, lorsque G n'est pas abélien. Ce manque de structure peut toutefois être partiellement comblé en symétrisant la situation, *via* les bitorseurs. En anticipant un peu, disons que les bitorseurs sont particulièrement bien adaptés à notre problème central, puisque, dans un sens que nous préciserons dans le chapitre III, ils permettent de “ne pas perdre d'informations”.

Munis de ces outils, on peut enfin donner la notion de gerbe, dont nous verrons qu'elle est très fortement liée à celles de torseur et de bitorseur. Il est impossible de parler de gerbes sans évoquer les champs, ce qui justifie les rappels sur les catégories fibrées, les préchamps... Pour avoir un premier aperçu de ce que peuvent être les gerbes, nous décrivons ensuite celles qui sont associées aux divers problèmes évoqués dans l'introduction. Enfin, nous rappelons les définitions de lien et de 2-cohomologie à valeurs

¹Ce n'est pas tout-à-fait vrai: pour être précis, le même ensemble $H^1(X, GL_{n,X})$ peut être interprété soit comme l'ensemble des classes d'isomorphie de $GL_{n,X}$ -torseurs sur X , soit comme l'ensemble des classes d'isomorphie de fibrés vectoriels de rang n sur X .

dans un lien. Dans leur écrasante majorité, les propriétés concernant les gerbes que nous rappelons ici sont issues de [Gi66] et [Gi71], mais elles sont peut-être rendues un peu plus explicites par notre choix de sites particuliers.

1.1 Sites et topoï

Comme nous venons de le signaler, les sites (et les topoï) généralisent les espaces topologiques². Grossièrement, un site est une catégorie munie d'une topologie, et plus précisément:

Définition 1.1.1. Soit \mathcal{C} une catégorie. Pour tout objet U de \mathcal{C} , on se donne des familles de morphismes, et on note $\text{Cov}(\mathcal{C})$ la réunion de ces familles. On dit que $\text{Cov}(\mathcal{C})$ est une **topologie de Grothendieck** si les conditions suivantes sont satisfaites:

(TG 1) Si $U \xrightarrow{\phi} V$ est un isomorphisme, alors $\phi \in \text{Cov}(\mathcal{C})$.

(TG 2) (Caractère local). Si $\left(T_\alpha \xrightarrow{\phi_\alpha} T\right)_\alpha$ est une famille dans $\text{Cov}(\mathcal{C})$, et si pour tout indice α , $\left(U_{\alpha\beta} \xrightarrow{\phi_{\alpha\beta}} T_\alpha\right)_\beta$ est une famille de $\text{Cov}(\mathcal{C})$, alors la famille

$$\left(U_{\alpha\beta} \xrightarrow{\phi_\alpha \circ \phi_{\alpha\beta}} T\right)_{\alpha\beta}$$

obtenue “par composition”, appartient à $\text{Cov}(\mathcal{C})$.

(TG 3) (Stabilité par changement de base). Si $\left(T_\alpha \xrightarrow{\phi_\alpha} T\right)_\alpha$ est une famille dans $\text{Cov}(\mathcal{C})$, et si V est un objet de \mathcal{C} sur³ T , alors les produits fibrés $T_\alpha \times_T V$ existent dans \mathcal{C} , et la famille

$$((\phi_\alpha)_V : T_\alpha \times_T V \rightarrow V)_\alpha$$

appartient à $\text{Cov}(\mathcal{C})$.

On appelle **site** une catégorie munie d'une topologie de Grothendieck.

Exemple 1.1.2. Le site $\mathcal{O}uv_X$ associé à un espace topologique X : on note $\mathcal{O}uv$ la catégorie dont les objets sont les ouverts de X , et dont les morphismes sont les inclusions. On choisit pour tout ouvert U de X la famille de toutes les familles d'ouverts $(V_i \hookrightarrow U)_{i \in I}$ dont la réunion est égale à U . On note $\text{Cov}(\mathcal{O}uv)$ la réunion de toutes ces familles; alors $\text{Cov}(\mathcal{O}uv)$ est une topologie de Grothendieck sur $\mathcal{O}uv$; en effet, les trois propriétés de la définition se traduisent dans cet exemple de la façon suivante:

²Afin d'illustrer cette affirmation, citons Grothendieck ([Gr58], p.301): “[...]la notion de topos, dérivé naturel du point de vue faisceautique en Topologie, constitue un élargissement substantiel de la notion d'espace topologique, englobant un grand nombre de situations qui autrefois n'étaient pas considérées comme relevant de l'intuition topologique. Le trait caractéristique de telles situations est qu'on y dispose d'une notion de “localisation”, notion qui est formalisée précisément par la notion de site et, en dernière analyse, par celle de topos[...].”

³I.e: il existe un morphisme de domaine V et de codomaine T .

- (TG 1) Le singleton $\{U \xrightarrow{id} U\}$ constitue un recouvrement ouvert de U ;
- (TG 2) “Un recouvrement ouvert d’un recouvrement ouvert est un recouvrement ouvert”;
- (TG 3) Si $(U_\alpha)_\alpha$ est un recouvrement ouvert d’un ouvert U , et si V est un ouvert inclus dans U , alors⁴ $(U_\alpha \cap V)_\alpha$ est un recouvrement ouvert de V .

Par suite $\mathcal{O}uv_X = (\mathcal{O}uv, \text{Cov}(\mathcal{O}uv))$ est un site. En particulier, si on prend pour espace topologique X un schéma, muni de la topologie de Zariski, on obtient le *site de Zariski* de X , noté X_{Zar} .

Exemple 1.1.3. Le site (Sch) : c’est la catégorie des schémas, munie de la topologie de Grothendieck pour laquelle une famille $(S_\alpha \xrightarrow{\phi_\alpha} S)_\alpha$ est couvrante (*i.e.* est dans $\text{Cov}(Sch)$) si et seulement si elle est surjective. Il est de nouveau immédiat (moyennant l’existence du produit fibré dans la catégorie des schémas, qui elle, n’est pas immédiate, cf. [EGA1] 3.2.1...) que les propriétés (TG 1), (TG 2) et (TG 3) sont vérifiées.

Exemple 1.1.4. Le site $S_{\text{ét}}$ des schémas étalés sur un schéma S : c’est la catégorie (Et/S) des S -schémas étalés (S étant un schéma quelconque), munie de la topologie de Grothendieck pour laquelle une famille de morphismes étalés est couvrante si et seulement si elle est surjective. Les propriétés (TG 1), (TG 2) et (TG 3) sont vérifiées, car l’identité est un morphisme étale, et le caractère étale est stable par composition et par changement de base (cf. [Mi80] proposition I.3.3). On appelle ce site le *site étale* de S , et on le note $S_{\text{ét}}$.

Dans le cas particulier où S est le spectre d’un corps k , on obtient le site étale de k : un objet de $(\text{Spec } k)_{\text{ét}}$ est une k -algèbre étale, c’est-à-dire une k -algèbre isomorphe à un produit d’extensions séparables finies de k .

Définition 1.1.5. Soient $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \text{Cov}(\mathcal{C}))$ et $\mathcal{S}' = (\mathcal{C}', \text{Cov}(\mathcal{C}'))$ deux sites. On appelle **morphisme de sites** la donnée d’un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ satisfaisant les propriétés suivantes:

- (i) Si $(U_\alpha \xrightarrow{\phi_\alpha} U)_\alpha$ est une famille de $\text{Cov}(\mathcal{C})$, alors $(F(U_\alpha) \xrightarrow{F(\phi_\alpha)} F(U))_\alpha$ est une famille de $\text{Cov}(\mathcal{C}')$;
- (ii) Si $(U_\alpha \xrightarrow{\phi_\alpha} U)_\alpha$ est une famille de $\text{Cov}(\mathcal{C})$ et si $V \rightarrow U$ est un morphisme (dans la catégorie \mathcal{C}), alors le morphisme canonique:

$$F(U_\alpha \times_U V) \longrightarrow F(U_\alpha) \times_{F(U)} F(V)$$

est un isomorphisme pour tout indice α .

Exemple 1.1.6. Soient X et Y deux espaces topologiques. Une application continue $f : X \rightarrow Y$ induit évidemment un morphisme de sites:

$$F : \mathcal{O}uv_Y \longrightarrow \mathcal{O}uv_X$$

⁴Dans cette catégorie, le produit fibré n’est autre que l’intersection.

le foncteur F associant à un ouvert $U \subset Y$ (*resp.* à l'inclusion $V \hookrightarrow U \subset Y$) l'ouvert $f^{-1}(U) \subset X$ (*resp.* l'inclusion $f^{-1}(V) \hookrightarrow f^{-1}(U) \subset X$).

Exemple 1.1.7. Soit $f : Y \rightarrow S$ un morphisme de schémas. On peut lui associer un morphisme de sites (*cf.* [SGA4-VII] 1.4):

$$f_{\text{ét}} : S_{\text{ét}} \longrightarrow Y_{\text{ét}}$$

défini en associant à un ouvert étale $(S' \rightarrow S)$ de S l'ouvert étale de Y obtenu par changement de base:

$$Y \times_S S' \longrightarrow Y$$

Définition 1.1.8. Soit $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \text{Cov}(\mathcal{C}))$ un site. On appelle **préfaisceau d'ensembles** (*resp.* de groupes, ...) sur \mathcal{S} un foncteur:

$$\mathcal{P} : \mathcal{C}^0 \longrightarrow \mathfrak{Ens} \text{ (*resp.* } \mathfrak{Grp}, \dots \text{)}$$

On appelle **faisceau d'ensembles** (*resp.* de groupes, ...) sur \mathcal{S} un préfaisceau satisfaisant la condition suivante: pour toute famille $(U_\alpha \rightarrow U)_\alpha$ de $\text{Cov}(\mathcal{C})$, le diagramme:

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_\alpha \mathcal{F}(U_\alpha) \rightrightarrows \prod_{\alpha, \beta} \mathcal{F}(U_\alpha \times_U U_\beta)$$

est exact.

Exemple 1.1.9. Dans la situation usuelle où X est un espace topologique, un faisceau d'ensembles au sens usuel sur X est un faisceau d'ensembles sur le site $\mathcal{O}uv_X$ (*cf.* exemple 1.1.2).

Nous donnons maintenant quelques exemples de faisceaux que nous utiliserons dans les applications. Il s'agit de faisceaux sur le site étale d'un schéma S ; pour plus de détails concernant les propriétés de ces faisceaux, nous renvoyons à [Mi80] ou [Tam94].

Exemple 1.1.10. Le faisceau $\mathbb{G}_{a,S}$: c'est le faisceau dont le groupe des sections au-dessus d'un ouvert étale $(S' \rightarrow S)$, noté simplement $\mathbb{G}_{a,S}(S')$ est:

$$\mathbb{G}_{a,S}(S') = \Gamma(S', \mathcal{O}_{S'}) = \mathcal{O}_{S'}(S')$$

Le faisceau $\mathbb{G}_{a,S}$ est appelé le *groupe additif* de S .

Exemple 1.1.11. Le faisceau $\mathbb{G}_{m,S}$ est le faisceau dont le groupe des sections au-dessus d'un ouvert étale $(S' \rightarrow S)$, noté $\mathbb{G}_{m,S}(S')$ est cette fois constitué des fonctions inversibles définies globalement sur S' :

$$\mathbb{G}_{m,S}(S') = \Gamma(S', \mathcal{O}_{S'}^*) = \mathcal{O}_{S'}^*(S')$$

Le faisceau $\mathbb{G}_{m,S}$ est appelé le *groupe multiplicatif* de S .

Exemple 1.1.12. Le faisceau $\mu_{n,S}$ est le faisceau des racines n -ièmes de l'unité. Les sections de celui-ci au-dessus d'un ouvert étale ($S' \rightarrow S$) sont données par:

$$\mu_{n,S}(S') = \{f \in \mathcal{O}_{S'}^*(S') / f^n = 1\}$$

Exemple 1.1.13. On peut associer à tout S -schéma Y un faisceau, noté temporairement \mathcal{F}_Y , de la manière suivante: pour tout ouvert étale ($S' \rightarrow S$), on prend comme sections de \mathcal{F}_Y :

$$\mathcal{F}_Y(S') = \text{Hom}_S(S', Y)$$

Un faisceau \mathcal{F} sur $S_{\text{ét}}$ est dit *représentable* s'il existe un S -schéma Y tel que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_Y$. Les trois précédents exemples de faisceaux sont justement représentables:

- le faisceau $\mathbb{G}_{a,S}$ est représenté par le schéma:

$$\text{Spec } \mathbb{Z}[T] \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} S$$

- le faisceau $\mathbb{G}_{m,S}$ est représenté par le schéma:

$$\text{Spec } \mathbb{Z}[T, T^{-1}] \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} S$$

- et enfin, le faisceau $\mu_{n,S}$ est représenté par le schéma:

$$\text{Spec } \left(\frac{\mathbb{Z}[T]}{(T^n - 1)} \right) \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} S$$

Dans nos applications, nous considérerons un k -groupe algébrique G , et un k -schéma X . Nous noterons G_X le produit fibré de X et de G au-dessus de $\text{Spec } k$:

$$\begin{array}{ccc} G_X & \longrightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\pi} & \text{Spec } k \end{array}$$

D'après ce qui précède, le k -groupe algébrique G (*resp.* le X -schéma en groupes G_X) représente un faisceau sur le site étale de k (*resp.* de X). Nous identifierons souvent G et G_X avec les faisceaux qu'ils représentent.

On dispose évidemment d'une notion de morphisme de (pré)faisceaux au-dessus d'un site \mathcal{S} donné. Il est non moins évident que les faisceaux d'ensembles sur \mathcal{S} et les morphismes entre iceux constituent une catégorie, que l'on note $\tilde{\mathcal{S}}$.

Nous concluons cette première section en introduisant la notion de topos [SGA4-IV]:

Définition 1.1.14. On appelle *topos* une catégorie \mathcal{T} telle qu'il existe un site \mathcal{S} telle que \mathcal{T} soit équivalente à la catégorie $\tilde{\mathcal{S}}$ des faisceaux d'ensembles sur \mathcal{S} .

Le principal topos auquel nous nous intéresserons dans ce travail est le *topos étale* d'un schéma S , noté $\widetilde{S}_{\text{ét}}$: c'est le topos des faisceaux d'ensembles sur le site étale de S . Nous renvoyons à [SGA4-VII] pour une étude approfondie des topoï étales des schémas. Faisons juste une remarque "fonctorielle": soit:

$$f : Y \longrightarrow S$$

un morphisme de schémas. On a vu dans l'exemple 1.1.7 que f induit un morphisme de sites:

$$f_{\text{ét}} : Y_{\text{ét}} \longrightarrow S_{\text{ét}}$$

correspondant au foncteur:

$$f^{-1} : (S' \rightarrow S) \rightsquigarrow (Y \times_S S' \rightarrow Y)$$

qui associe à un ouvert étale de S l'ouvert étale de Y obtenu par changement de base. Alors f induit également un morphisme entre les topos étals de Y et de S :

$$\widetilde{f}_{\text{ét}} : \widetilde{Y}_{\text{ét}} \longrightarrow \widetilde{S}_{\text{ét}}$$

Le morphisme $\widetilde{f}_{\text{ét}}$ associe à tout faisceau d'ensembles sur le site étale de Y le faisceau sur le site étale de S obtenu par image directe grâce à f .

Notation 1.1.15. Dans nos applications, le schéma de base S sera souvent X ou $\text{Spec } k$. Pour alléger un peu la terminologie, nous dirons simplement, lorsque le contexte est clair, "faisceau sur X (resp. sur k)" au lieu de "faisceau d'ensembles sur le site étale de X (resp. de $\text{Spec } k$)". D'ailleurs, plus généralement nous parlerons de préchamp, champ, gerbe... sur un schéma S (resp. sur un corps k) pour désigner un préchamp, un champ, une gerbe... sur le site étale de S (resp. sur le site étale de $\text{Spec } k$).

1.2 Torseurs

Nous nous limitons aux torseurs sur le site étale d'un schéma et nous renvoyons au chapitre III de [Gi71] pour l'étude des torseurs sur un site général.

Définition 1.2.1. Soient S un schéma et G_S un schéma en groupes sur S . Un G_S -torseur à droite sur S est un faisceau P sur S , muni d'une action à droite du faisceau de groupes G_S , tel que:

il existe un recouvrement étale $(S_i \rightarrow S)_{i \in I}$ tel que l'ensemble $P(S_i)$ soit principal homogène sous l'action du groupe $G_S(S_i)$, pour tout $i \in I$.

Un **morphisme** $\varphi : P \rightarrow P'$ de G_S -torseurs est un morphisme de faisceaux G_S -équivariant. Etant donné un G_S -torseur P , on note:

$$\text{ad}_{G_S}(P)$$

le faisceau des automorphismes du G_S -torseur P .

Enfin on note:

$$\text{EHP}(G_S/S)$$

l'ensemble des classes d'isomorphie de G_S -torseurs sur S .

Remarque 1.2.2. Rappelons que d'après nos conventions et notations:

- $P(S_i)$ (*resp.* $G_S(S_i)$) désigne l'ensemble (*resp.* le groupe) des sections du faisceau P (*resp.* G_S) au-dessus de l'ouvert étale ($S_i \rightarrow S$);
- le S -schéma en groupes G_S est identifié au faisceau de groupes qu'il représente;
- la locution “ P est un faisceau sur S ” est mise pour “ P est un faisceau d'ensembles sur le site étale de S ”.

Remarque 1.2.3. On peut évidemment définir de la même manière les G_S -torseurs à gauche. Notons que par la suite, nous appellerons simplement G_S -torseur un G_S -torseur à droite. Les G_S -torseurs sur S et leurs morphismes constituent une catégorie, que l'on note $Tors(S, G_S)$.

Après cette définition “faisceautique” de torseur, notons que l'on dispose, moyennant des hypothèses très raisonnables sur le schéma G_S , d'une interprétation géométrique de ces objets. Plus précisément:

Proposition 1.2.4. *Soit S un schéma, et G_S un schéma en groupes affine sur S . Alors tout G_S -torseur sur S est représentable par un schéma.*

PREUVE: c'est le (a) du théorème III.4.3 de [Mi80].

□

En particulier, dans la situation de notre problème central (*cf.* page XI), les G_X -torseurs sont représentables. En effet, du fait que G est un k -groupe algébrique linéaire, le morphisme structural:

$$G \longrightarrow \text{Spec } k$$

est affine. Il s'ensuit que le morphisme:

$$G_X \longrightarrow X$$

l'est aussi, le caractère affine étant stable par changement de base quelconque (*cf.* [EGA1] I.9.1.16).

Donnons maintenant quelques exemples de torseurs:

Exemple 1.2.5. Etant donnés un schéma S et un S -schéma en groupes G_S , on appelle G_S -torseur trivial et on note $G_{S,d}$ le G_S -torseur obtenu en faisant opérer G_S sur lui-même à droite par translations. Par définition même, tout G_S -torseur est isomorphe à $G_{S,d}$, localement pour la topologie étale sur S . En continuant d'enfoncer des portes ouvertes, il s'ensuit que deux G_S -torseurs sont toujours localement isomorphes pour la topologie étale.

Exemple 1.2.6. Avec les mêmes notations que ci-dessus, on peut associer naturellement à tout G_S -torseur (à droite) P un $\text{ad}_{G_S}(P)$ -torseur à gauche, le faisceau des automorphismes (G_S -équivariants) de P opérant à gauche sur P de manière évidente. Nous reviendrons sur cette remarque dans la section concernant les bitorseurs.

Exemple 1.2.7. Les classes d'isomorphie de $\mathbb{G}_{m,S}$ -torseurs (*resp.* de $GL_{n,S}$ -torseurs) sur S coïncident avec les classes d'isomorphie de fibrés en droites (*resp.* de fibrés vectoriels de rang n) sur S .

Exemple 1.2.8. Soient n un entier ≥ 2 et k un corps quelconque. On peut associer au groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ un faisceau de groupes sur la droite projective \mathbb{P}_k^1 (faisceau constant). Un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -torseur sur \mathbb{P}_k^1 est alors un revêtement étale de la droite projective de groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

En vue de nos applications, il est évidemment indispensable de disposer d'un moyen de calculer pratiquement l'ensemble EHP (G_S/S). Ce moyen est fourni par l'énoncé ci-dessous, qui est un cas particulier du corollaire III.4.7 de [Mi80]:

Proposition 1.2.9. *Soient k un corps de caractéristique nulle, G un k -groupe algébrique linéaire, et X un k -schéma. Alors les ensembles EHP (G_X/X) et $H_{\text{ét}}^1(X, G_X)$ sont en bijection.*

L'exemple ci-dessous est une application de cette proposition aux algèbres simples centrales et aux variétés de Severi-Brauer.

Exemple 1.2.10. Soit S un schéma. Rappelons que l'on appelle algèbre d'Azumaya sur S un faisceau de \mathcal{O}_S -algèbres \mathcal{A} , pour lequel il existe un recouvrement étale $(S_i \rightarrow S)_{i \in I}$ de S tel que pour tout $i \in I$, il existe un entier n_i tel que:

$$\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S_i} \approx M_{n_i}(\mathcal{O}_{S_i})$$

Il revient au même (d'après le thm. 5.1 p.57 de [Gr68]) de dire que \mathcal{A} est une \mathcal{O}_S -algèbre localement libre telle que:

- (i) pour tout point s de S , $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} k(s)$ est une algèbre simple centrale;
- (ii) le morphisme naturel $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}^{\text{opp}} \rightarrow \text{End}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{A})$ est un isomorphisme de \mathcal{O}_S -algèbres.

Nous appellerons algèbre d'Azumaya d'indice n une algèbre d'Azumaya pour lesquels tous les n_i de la définition ci-dessus sont égaux à n . Qu'une algèbre d'Azumaya d'indice n sur un schéma S soit un $PGL_{n,S}$ -torseur sur S découle de l'énoncé suivant, qui généralise aux schémas le lemme de Skolem-Noether:

Théorème 1.2.11 (Auslander-Goldman, [Gr68]). *Soit \mathcal{A} une algèbre d'Azumaya sur S , u un automorphisme de \mathcal{A} . Alors, localement pour la topologie étale, u est intérieur, i.e. de la forme:*

$$u(s) = asa^{-1}$$

où a est une section inversible de \mathcal{A} , déterminée d'ailleurs de façon unique modulo multiplication par une section de \mathcal{O}_S^* . De manière équivalente, le schéma des automorphismes de l'algèbre associative $M_n(\mathcal{O}_S)$ est canoniquement isomorphe au groupe projectif $PGL_{n,S}$.

Dans le cas particulier où $S = \text{Spec } k$, on retrouve la définition d'algèbre simple centrale: une algèbre d'Azumaya d'indice n sur k est une algèbre simple centrale d'indice n , soit une k -forme de l'algèbre de matrices M_n . D'après la proposition 1.2.8, l'ensemble des classes d'isomorphie de k -algèbres simples centrales est en bijection avec l'ensemble $H_{\text{ét}}^1(k, PGL_n)$. Remarquons alors que les multiples facettes de PGL_n fournissent des interprétations différentes de cet ensemble. Explicitement, comme:

$$PGL_n = \text{Aut } M_n = \text{Int } SL_n = \text{Aut } \mathbb{P}^{n-1}$$

on en déduit une correspondance entre les k -formes de M_n , celles de \mathbb{P}^{n-1} et les k -formes intérieures de SL_n :

$$\begin{array}{c} \{k\text{-algèbres simples centrales d'indice } n\} \\ \uparrow \\ \{k\text{-formes intérieures de } SL_n\} \\ \downarrow \\ \{\text{Variétés de Severi-Brauer de dimension } n-1\} \end{array}$$

Exemple 1.2.12. Suivant la remarque 2.1 de [SGA4-VII], lorsque G est un groupe commutatif ordinaire (*i.e.* G est un faisceau constant), on écrira simplement $H^1(X, G)$ au lieu de $H^1(X, G_X)$. Si par exemple G est abélien fini, alors $H^1(X, G)$ est l'ensemble des classes d'isomorphie de G -revêtements galoisiens, pour lesquels les problèmes de descente ont été largement étudiés dans [DD87] et [DD97]. Lorsque X est connexe et muni d'un point géométrique x , on a l'isomorphisme canonique:

$$H^1(X, G) = \text{Hom}(\Pi_1(X, x), G)$$

Exemple 1.2.13. Pour faire le lien avec la terminologie de Springer ([Sp66]), disons encore que si G est un k -groupe algébrique, les G -torseurs sur k sont évidemment des k -espaces homogènes avec isotropie triviale.

Le résultat suivant, qui concerne les faisceaux d'automorphismes des torseurs, est assez évident mais d'une importance capitale pour comprendre la différence entre les chapitres 2 et 3 (*i.e.* entre les situations abélienne et non-abélienne):

Lemme fondamental 1.2.14. Soient S un schéma, G_S un schéma en groupes sur S , et P un G_S -torseur sur S . Alors $\text{ad}_{G_S}(P)$ est une S -forme intérieure de G_S ; autrement dit:

$$\text{ad}_{G_S}(P) \text{ représente une classe de } H^1(S, \text{Int } G_S).$$

En particulier, si G_S est abélien, alors:

$$\text{ad}_{G_S}(P) \approx G_S$$

PREUVE: par définition, il existe un recouvrement étale $(S_i \rightarrow S)$ trivialisant P . On choisit alors une section p_i de $P|_{S_i}$, pour tout $i \in I$.

Pour tout $(i, j) \in I \times I$, on note S_{ij} le schéma $S_i \times_S S_j$. Du fait que l'action de $G_{S|S_i}$ sur $P|_{S_{ij}}$ est simplement transitive⁵, il existe $\gamma_{ij} \in G_S(S_{ij})$ tel que:

$$p_{j|S_{ij}} = p_{i|S_{ij}} \cdot \gamma_{ij}$$

(la famille $(\gamma_{ij})_{i,j}$ est justement un 1-cocycle représentant la classe de P dans $H^1(S, G_S)$). Afin de ne pas surcharger les notations, nous abandonnons à partir de maintenant les indices “ $|S_{ij}$ ”. Nous réécrivons donc l'égalité précédente:

$$p_j = p_i \cdot \gamma_{ij} \quad (E1)$$

Soit maintenant f un automorphisme de P . Comme f est G_S -équivariante:

$$\exists g_i \in G_S(S_i) \text{ tel que } f(p_i) = p_i \cdot g_i, \forall i \in I.$$

Pour tout $(i, j) \in I \times I$, on obtient, en utilisant la relation (E1):

$$f(p_j) = p_j \cdot g_j = p_i \cdot \gamma_{ij} \cdot g_j \quad (E2)$$

D'autre part en utilisant la relation (E2) et la G_S -équivariance de f , on a:

$$f(p_j) = f(p_i \cdot \gamma_{ij}) = f(p_i) \cdot \gamma_{ij} = p_i \cdot g_i \cdot \gamma_{ij} \quad (E3)$$

En comparant les relations (E2) et (E3) et en utilisant une nouvelle fois la simple transitivité de l'action, on obtient:

$$g_i \cdot \gamma_{ij} = \gamma_{ij} \cdot g_j$$

soit finalement:

$$g_i = \gamma_{ij} \cdot g_j \cdot \gamma_{ij}^{-1} = \text{conj}(\gamma_{ij})(g_j)$$

Notons tout de suite qu'il est immédiat que la famille $(\text{conj}(\gamma_{ij}))_{i,j}$ est un 1-cocycle à valeurs dans $\text{Int } G_S$, puisque $(\gamma_{ij})_{i,j}$ est un 1-cocycle à valeurs dans G_S .

De plus, la relation ci-dessus traduit le fait que le faisceau $\text{ad}_{G_S}(P)$ est la donnée des faisceaux locaux $G_{S|S_i}$ recollés au-dessus des S_{ij} par les automorphismes intérieurs $\text{conj}(\gamma_{ij})$. Autrement dit, c'est une S -forme intérieure de G_S .

□

Dans la suite, nous aurons besoin de connaître l'influence d'un morphisme de schémas (plus précisément l'influence du morphisme structural $\pi : X \rightarrow \text{Spec } k$) sur les torseurs; c'est l'intérêt de l'énoncé suivant:

Lemme 1.2.15. *Soient k un corps de caractéristique nulle, X un k -schéma, $\pi : X \rightarrow \text{Spec } k$ le morphisme structural, G un k -groupe algébrique linéaire, et P (resp. Q) un G_X -torseur (resp. un G -torseur) sur X (resp. sur $\text{Spec } k$). Alors:*

⁵Cet abus de langage signifie en fait que le groupe $G_S(S')$ opère simplement transitivement (à droite, d'après nos conventions sur les torseurs) sur l'ensemble $P(S')$, pour tout S_{ij} -schéma étale S' .

- (i) le faisceau image directe $\pi_* P$ est un $\pi_* G_X$ -pseudo-torseur sur $\text{Spec } k$;
- (ii) si $\bar{G}_X(\bar{X}) = \bar{G}(\bar{k})$, alors $\pi_* P$ est un G -pseudo-torseur sur $\text{Spec } k$;
- (iii) le faisceau image inverse $\pi^* Q$ est un $\pi^* G$ -torseur sur X .

PREUVE: pour le point (i), il suffit de prouver que pour toute extension étale L de k , l'ensemble $\pi_* P(\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } k)$ est vide ou principal homogène sous l'action du groupe $\pi_* G_X(\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } k)$. Ceci provient du fait que l'ensemble:

$$\pi_* P(\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } k) = P(X_L \rightarrow X) = \text{Hom}_X(X_L, P)$$

est vide ou principal homogène sous le groupe:

$$\pi_* G_X(\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } k) = G_X(X_L \rightarrow X) = \text{Hom}_X(X_L, G_X)$$

car P est un G_X -torseur sur X .

Pour établir le point (ii), il suffit de comparer les faisceaux (sur $(\text{Spec } k)_{\text{ét}}$) $\pi_* G_X$ et G ; pour ce faire, il suffit d'étudier leurs fibres $(\pi_* G_X)_{\bar{k}}$ et $G_{\bar{k}}$. Par définition:

$$(\pi_* G_X)_{\bar{k}} = \varinjlim_L [G_X(X_L \rightarrow X)] = \text{Hom}_X(\bar{X}, G_X)$$

la limite directe étant prise sur les extensions étales L de k . De la même façon:

$$(G)_{\bar{k}} = \varinjlim_L [G(\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } k)] = \text{Hom}_k(\text{Spec } \bar{k}, G)$$

Par conséquent, les faisceaux $\pi_* G_X$ et G sont isomorphes si et seulement si:

$$\text{Hom}_X(\bar{X}, G_X) = \text{Hom}_k(\text{Spec } \bar{k}, G)$$

Cette dernière condition est équivalente à:

$$[\text{Hom}_{\bar{X}}(\bar{X}, \bar{G}_X) =] \quad \bar{G}_X(\bar{X}) = \bar{G}(\bar{k}) \quad [= \text{Hom}_{\bar{k}}(\text{Spec } \bar{k}, \bar{G})]$$

En effet, les ensembles $\text{Hom}_X(\bar{X}, G_X)$ et $\text{Hom}_{\bar{X}}(\bar{X}, \bar{G}_X)$ sont naturellement en bijection; à tout élément $\varphi \in \text{Hom}_{\bar{X}}(\bar{X}, \bar{G}_X)$ on associe l'élément $p_G \circ \varphi$ de $\text{Hom}_X(\bar{X}, G_X)$:

$$\begin{array}{ccc} \bar{G}_X & \xrightarrow{p_G} & G_X \\ \varphi \swarrow \downarrow & \nearrow p_G \circ \varphi & \downarrow \\ \bar{X} & \xrightarrow{\quad} & X \end{array}$$

Réciproquement, on peut associer à tout $f \in \text{Hom}_X(\bar{X}, G_X)$ le morphisme (dont l'existence est assurée par la propriété universelle du produit fibré) $\varphi \in \text{Hom}_{\bar{X}}(\bar{X}, \bar{G}_X)$ du diagramme ci-dessous:

$$\begin{array}{ccccc} \bar{X} & \xrightarrow{\quad} & \bar{G}_X & \xrightarrow{p_G} & G_X \\ \varphi \searrow & \nearrow f & \downarrow & & \downarrow \\ & id & \bar{X} & \xrightarrow{\quad} & X \end{array}$$

Le point (iii) est évident, à partir du moment où l'on a remarqué que comme G est linéaire, le G -torseur Q est représentable par un schéma, que l'on note encore Q , et le faisceau π^*Q est alors représenté par le X -schéma π^*Q d'après la proposition II.3.1.3 de [Tam94].

□

Remarque 1.2.16. Nous aurons l'occasion de revenir en détail sur l'utilité de la condition $\bar{G}_X(\bar{X}) = \bar{G}(\bar{k})$ dans les problèmes de descente.

Remarque 1.2.17. Avec les notations du lemme précédent, il n'est en général pas vrai que le faisceau image inverse π^*G est représenté par le schéma en groupes G_X . C'est cependant le cas si G est un groupe fini, d'après la remarque 3.1.(d) page 69 de [Mi80].

1.3 Bitorseurs

Lorsque l'on veut étudier les G_S -torseurs sur un schéma S , il est essentiel de connaître leurs faisceaux d'automorphismes. Dans le cas abélien, d'après le lemme 1.2.13, il n'y a rien à faire. En revanche dans le cas général, d'après le même lemme, ces faisceaux sont des formes intérieures de G_S , et il convient donc de tenir compte de cette information supplémentaire. C'est ce qui motive l'introduction des bitorseurs⁶. Comme d'habitude, nous nous restreignons ici aux bitorseurs sur un schéma, et nous renvoyons à [Br90] pour la définition de bitorseur sur un topos en général.

Définition 1.3.1. Soient S un schéma, G_S et H_S deux schémas en groupes sur S . On appelle (H_S, G_S) -bitorseur sur S un faisceau d'ensembles B sur le site étale de S muni d'une action à gauche (resp. à droite) de H_S (resp. de G_S), ces actions commutant entre elles, tel que B soit un H_S -torseur à gauche et un G_S -torseur à droite.

Lorsque $G_S = H_S$, nous dirons simplement G_S -bitorseur pour désigner un (G_S, G_S) -bitorseur.

Soient B_1 et B_2 deux (H_S, G_S) -bitorseurs sur S . Un **morphisme** de (H_S, G_S) -bitorseurs est morphisme de faisceaux d'ensembles $\varphi : B_1 \rightarrow B_2$ qui est (H_S, G_S) -équivariant.

Les (H_S, G_S) -bitorseurs (resp. les G_S -bitorseurs) sur S et leurs morphismes constituent une catégorie, notée:

$$\text{Bitors}(S; H_S, G_S) \quad (\text{resp. } \text{Bitors}(S; G_S))$$

Exemple 1.3.2. Le G_S -bitorseur trivial, noté $G_{S,\text{bitriv}}$, est obtenu en faisant opérer G_S sur lui-même par translations à gauche et à droite.

⁶C'est également ce qui justifie le fait qu'il est désespéré d'arriver à une généralisation vraiment "idéale" de la suite à 5 termes dans le cas non-abélien avec les " H^1 " usuels; puisque par exemple l'ensemble $H_{\text{ét}}^1(S, G_S)$ correspond certes aux classes d'isomorphie de G_S -torseurs sur S , mais oublie délibérément la structure à gauche de ces objets.

Exemple 1.3.3. Soit u un automorphisme de G_S . On lui associe le G_S -bitorseur noté (G_S, u) , défini en faisant opérer G_S sur lui-même:

- à droite par translations;
- à gauche en posant: $g \bullet_{gauche} g' = u(g) \cdot g'$

Exemple 1.3.4. A tout G_S -bitorseur, on associe naturellement un G_S -torseur en “oubliant” l’action de G_S à gauche. Réciproquement, à tout G_S -torseur P , on associe un $(\text{ad}_{G_S}(P), G_S)$ -bitorseur en faisant opérer à gauche $\text{ad}_{G_S}(P)$ sur P de façon évidente.

Exemple 1.3.5. A tout (H_S, G_S) -bitorseur B on peut associer un (G_S, H_S) -bitorseur noté B^{opp} et appelé *bitorseur opposé* à B , la nouvelle action à gauche (resp. à droite) de G_S (resp. de H_S) étant définie en posant:

$$g \square b = b \bullet g^{-1} \quad (\text{resp. } b \square h = h * b), \quad \forall g \in G_S, \forall h \in H_S, \forall b \in B;$$

où \bullet (resp. $*$) désigne l’action à droite (resp. à gauche) de G_S (resp. de H_S) donnée par la structure de (H_S, G_S) -bitorseur de B .

Remarque 1.3.6. Pour classifier les bitorseurs, on doit introduire la cohomologie à valeurs dans les modules croisés. On appelle *module croisé* (à gauche) sur S la donnée d’un morphisme de schémas en groupes sur S :

$$\varphi : G_S \longrightarrow H_S$$

et d’une action à gauche de H_S sur G_S tels que:

- (i) $\varphi({}^h g) = h \cdot \varphi(g) \cdot h^{-1}, \forall g \in G_S, \forall h \in H_S;$
- (ii) $\varphi(g)g' = g \cdot g' \cdot g^{-1}, \forall g, g' \in G_S;$

Par exemple, pour tout schéma en groupes G_S sur S , le morphisme évident:

$$conj : G_S \longrightarrow \text{Aut } G_S$$

et l’action naturelle de $\text{Aut } G_S$ sur G_S donnent lieu à un module croisé sur S . De plus, dans [Br90] ou [Br92], Breen définit la cohomologie à valeurs dans ce module croisé ($G_S \rightarrow \text{Aut } G_S$). Sans rentrer dans les détails de cette construction⁷, signalons juste que:

- $H^0(S, G_S \rightarrow \text{Aut } G_S)$ correspond aux classes d’isomorphie de G_S -bitorseurs sur S , et

⁷Que l’on peut d’ailleurs rapprocher de la cohomologie à valeurs dans un système de coefficients introduite dans [Do76].

- $H^1(S, G_S \rightarrow \text{Aut } G_S)$ correspond aux classes d'équivalence de gerbes sur S localement liées par G_S . En anticipant un peu, cet ensemble diffère du H^2 de Giraud, puisque deux gerbes équivalentes (et non lien G_S -équivalentes) donnent la même classe dans ce H^1 , et pas nécessairement dans le H^2 de Giraud.

La suite exacte (*cf.* [Br90]) suivante contient l'essentiel des propriétés des bitorseurs dont nous aurons besoin dans la suite de notre propos:

$$\begin{array}{ccccc}
& H^0(\text{Int } G_S) & & & \\
\swarrow & & \searrow & & \\
H^0(G_S) & \xrightarrow{\text{conj.}} & H^0(\text{Aut } G_S) & \xrightarrow{b} & H^0(G_S \rightarrow \text{Aut } G_S) \xrightarrow{AP} \dots \\
& & & & \\
& H^1(\text{Int } G_S) & & & \\
\swarrow & & \searrow & & \\
\dots \rightarrow H^1(G_S) & \xrightarrow{\text{ad}_{G_S}} & H^1(\text{Aut } G_S) & \searrow \lambda & H^1(\text{Out } G_S)
\end{array}$$

où l'on a noté $H^i(\bullet)$ l'ensemble de cohomologie $H^i(S, \bullet)$ et:

- $\text{conj.} : H^0(G_S) \rightarrow H^0(\text{Aut } G_S)$ est le morphisme évident;
- pour tout $u \in H^0(\text{Aut } G_S)$, $b(u)$ est le bitorseur (G_S, u) de l'exemple 1.3.3;
- AP est le foncteur “amnésie partielle” qui associe à tout G_S -bitorseur B le G_S -torseur à droite sous-jacent;
- pour tout G_S -torseur P , $\text{ad}_{G_S}(P)$ est comme d'habitude le faisceau des G_S -automorphismes de P (dans la preuve du lemme 1.2.13, nous avons explicitement décrit ce morphisme);
- enfin l'application:

$$\lambda : H^1(\text{Aut } G_S) \rightarrow H^1(\text{Out } G_S)$$

est celle qui associe à une forme de G_S le lien qu'elle représente; remarquons l'image par λ d'une forme G'_S de G_S est égale à la classe privilégiée de $H^1(\text{Out } G_S)$ si et seulement si G'_S est une S -forme *intérieure* de G_S .

En particulier, si G_S est un schéma en groupes abéliens, on a la suite exacte:

$$0 \rightarrow H^0(\text{Aut } G_S) \rightarrow H^0(G_S \rightarrow \text{Aut } G_S) \rightarrow H^1(G_S) \rightarrow 0$$

Dans ce cas, les G_S -bitorseurs constituent une extension des G_S -torseurs par $\text{Aut } G_S$.

Pour clore cette section, notons que l'on dispose sur les bitorseurs une loi de composition partiellement définie, grâce au produit contracté. Plus explicitement:

Définition 1.3.7. Soient S un schéma, et G_S , H_S et L_S des schémas en groupes sur S . Soient encore B (resp. C) un (H_S, G_S) -bitorseur (resp. un (G_S, L_S) -bitorseur). On appelle **produit contracté de B et de C** , et on note:

$$B \wedge^{G_S} C$$

le faisceau $B \times C$ quotienté par la relation:

$$(b.g, c) = (b, g.c)$$

D'après [Br90], l'action à gauche (resp. à droite) de H_S (resp. de L_S) fait de $B \wedge^{G_S} C$ un (H_S, L_S) -bitorseur.

Le bitorseur trivial est l'élément neutre pour ce produit, et le produit contracté d'un bitorseur B avec son opposé B^{opp} est isomorphe au bitorseur trivial.

1.4 Préchamps et champs

Il est bien connu (par exemple grâce à [LMB00]) que les champs algébriques fournissent une généralisation de la notion de schéma. Ils apparaissent naturellement dans des problèmes de modules, où le foncteur que l'on étudie n'est pas représentable par un schéma, du fait de la présence d'automorphismes (voir par exemple l'étude des courbes de genre $g \geq 2$ sur un schéma S [DM69]). En clair, on ne peut obtenir un espace des modules fin qu'en “rigidifiant” la situation, par l'intermédiaire de structures supplémentaires (pour être un peu plus concret, cela se fait *via* les structures de niveau pour les variétés abéliennes). De la même manière, il est raisonnable de voir les champs en général (sur le site étale d'un schéma S) comme une généralisation des faisceaux d'ensembles sur S .

La définition de champ sur un schéma S nécessite plusieurs étapes. Premièrement, on appelle *catégorie fibrée sur S* la donnée:

- (i) pour tout ouvert étale $(S_1 \rightarrow S)$ d'une catégorie, notée $\mathcal{G}(S_1)$ et appelée *catégorie fibre* de \mathcal{G} au-dessus de l'ouvert étale $(S_1 \rightarrow S)$;
- (ii) pour toute inclusion⁸:

$$\begin{array}{ccc} S_2 & \longrightarrow & S_1 \\ & \searrow & \swarrow \\ & S & \end{array}$$

entre ouverts étals de S , d'un foncteur (restriction à S_2):

$$\rho_{S_1 S_2} : \quad \mathcal{G}(S_1) \longrightarrow \mathcal{G}(S_2)$$

$$g_1 \longmapsto g_{1|S_2}$$

⁸Pour faire le parallèle avec la définition usuelle de préfaisceau, nous appelons ici “inclusion” un morphisme entre ouverts étals de S ; cet abus est justifié par le fait qu'une catégorie fibrée est grossièrement un préfaisceau en catégories, comme il est d'ailleurs indiqué dans [Br94a]. Un tel morphisme n'est cependant pas un monomorphisme en général.

(iii) pour toute double inclusion:

$$\begin{array}{ccccc} S_3 & \longrightarrow & S_2 & \longrightarrow & S_1 \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & S & & \end{array}$$

d'une transformation naturelle:

$$\tau_{S_3 S_2 S_1} : \rho_{S_1 S_3} \Rightarrow \rho_{S_2 S_3} \circ \rho_{S_1 S_2}$$

de telle sorte que, pour toute triple inclusion:

$$\begin{array}{ccccc} S_4 & \longrightarrow & S_3 & \longrightarrow & S_2 \longrightarrow S_1 \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & S & & \end{array}$$

les transformations naturelles obtenues par composition:

$$\rho_{S_1 S_4} \Rightarrow \rho_{S_3 S_4} \circ \rho_{S_1 S_3} \Rightarrow \rho_{S_3 S_4} \circ (\rho_{S_2 S_3} \circ \rho_{S_1 S_2})$$

et

$$\rho_{S_1 S_4} \Rightarrow \rho_{S_2 S_4} \circ \rho_{S_1 S_2} \Rightarrow (\rho_{S_3 S_4} \circ \rho_{S_2 S_3}) \circ \rho_{S_1 S_2}$$

coïncident.

\mathcal{G} est appelée une *catégorie fibrée en groupoïdes* sur S , si la catégorie fibre $\mathcal{G}(S')$ au-dessus de tout ouvert étale $(S' \rightarrow S)$ est un groupoïde⁹. Le foncteur naturel:

$$\mathcal{G} \longrightarrow S_{\text{ét}}$$

est appelé *projection* ou *morphisme structural* de \mathcal{G} . Commençons par un exemple naïf:

Exemple 1.4.1. Soit $\pi : X \rightarrow \text{Spec } k$ un k -schéma. On peut associer à X une catégorie fibrée sur k ,¹⁰ notée provisoirement \mathcal{G}_X , en prenant pour toute extension étale L de k le groupoïde discret dont l'ensemble d'objets est:

$$\mathcal{G}_X(L) = \text{Hom}_{\text{Spec } k}(\text{Spec } L, X)$$

Autrement dit, la catégorie fibre de \mathcal{G}_X au-dessus de L a pour objets les points à valeurs dans $\text{Spec } L$ du k -schéma X , et les seuls morphismes sont les identités des objets (en particulier \mathcal{G}_X est une catégorie fibrée en groupoïdes!).

Nous donnerons un peu plus loin des exemples plus intéressants (heureusement!) de catégories fibrées. La totalité des catégories fibrées que nous considérerons seront des catégories fibrées en groupoïdes.

⁹Un groupoïde est une catégorie où toute flèche est inversible.

¹⁰I.e. une catégorie fibrée sur le site étale de $\text{Spec } k$.

Un *morphisme* $F : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ entre deux catégories fibrées sur S est la donnée pour tout ouvert étale $(S_1 \rightarrow S)$ d'un foncteur $F_{S_1} : \mathcal{G}(S_1) \rightarrow \mathcal{G}'(S_1)$ naturellement compatible avec les restrictions, dans le sens où pour toute inclusion $(S_2 \rightarrow S_1)$ le carré suivant:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(S_1) & \xrightarrow{F_{S_1}} & \mathcal{G}'(S_1) \\ \rho_{S_1 S_2}^{\mathcal{G}} \downarrow & & \downarrow \rho_{S_1 S_2}^{\mathcal{G}'} \\ \mathcal{G}(S_2) & \xrightarrow{F_{S_2}} & \mathcal{G}'(S_2) \end{array}$$

commute, à un isomorphisme de foncteurs près; *i.e.* il existe une transformation naturelle:

$$\theta_{S_1 S_2} : \rho_{S_1 S_2}^{\mathcal{G}'} \circ F_{S_1} \Rightarrow F_{S_2} \circ \rho_{S_1 S_2}^{\mathcal{G}}$$

cette transformation naturelle satisfaisant à son tour des conditions de compatibilité avec les transformations naturelles " $\tau_{S_3 S_2 S_1}$ ". Un tel foncteur est aussi appelé *foncteur cartésien* entre les catégories \mathcal{G} et \mathcal{G}' .

Un *préchamp de groupoïdes sur S* (ou simplement préchamp sur S) est une catégorie fibrée en groupoïdes \mathcal{G} sur S où les isomorphismes se recollent: explicitement, cela signifie qu'étant donnés un ouvert étale $(S' \rightarrow S)$, x et y deux objets de $\mathcal{G}(S')$, $(S_i \rightarrow S')_{i \in I}$ un recouvrement étale de S' , la suite d'ensembles:

$$\text{Isom}_{\mathcal{G}(S')} (x, y) \longrightarrow \prod_{i \in I} \text{Isom}_{\mathcal{G}(S_i)} (x|_{S_i}, y|_{S_i}) \Longrightarrow \prod_{i,j \in I} \text{Isom}_{\mathcal{G}(S_{ij})} (x|_{S_{ij}}, y|_{S_{ij}})$$

est exacte (on a noté $S_{ij} = S_i \times_{S'} S_j$). Plus succinctement, il revient au même de dire que $\text{Isom}(x, y)$ est un faisceau sur le site étale de S' .

Un *champ de groupoïdes sur S* (ou juste champ sur S , ou encore S -champ) est un préchamp de groupoïdes \mathcal{G} sur S où toute donnée de descente sur les objets est effective, ce qui signifie ceci: soient:

- $(S' \rightarrow S)$ un ouvert étale de S ;
- $(S_i \rightarrow S')_{i \in I}$ un recouvrement étale de S' ;
- $(g_i)_{i \in I}$ une famille de sections de \mathcal{G} , plus précisément:

$$g_i \in \text{Ob}(\mathcal{G}(S_i)), \forall i \in I;$$

- pour tout couple $(i, j) \in I \times I$, un isomorphisme:

$$\varphi_{ij} : g_j|_{S_{ij}} \longrightarrow g_i|_{S_{ij}}$$

de telle sorte que:

$$\varphi_{ik} = \varphi_{ij} \circ \varphi_{jk}, \forall (i, j, k) \in I \times I \times I$$

cette dernière égalité ayant lieu dans $\text{Isom}(\mathcal{G}(S_{ijk}))$.

Alors il existe (effectivement) un objet $g' \in \mathcal{G}(S')$ et des isomorphismes:

$$\eta_i : g'_{|S_i} \longrightarrow g_i$$

compatibles avec les isomorphismes de recollement, dans le sens où:

$$\varphi_{ij} \circ \eta_j = \eta_i \text{ sur } S_{ij}, \forall (i, j) \in I \times I.$$

Grossièrement, un champ est donc une catégorie fibrée dans laquelle les morphismes *et* les objets se recollent. Nous en donnons maintenant quelques exemples.

Exemple 1.4.2 (Le champ $Tors(k, G)$ des G -torseurs sur un corps k). Soient k un corps et G un k -groupe algébrique. Pour tout ouvert étale ($\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } k$), les G_L -torseurs sur le site étale de L sont les objets de la catégorie $Tors(L, G_L)$; cette catégorie est d'ailleurs un groupoïde, puisque tout morphisme de torseurs est un isomorphisme, du fait de la simple transitivité de l'action. En outre, si ($\text{Spec } L' \rightarrow \text{Spec } k$) est un ouvert étale de k inclus dans le premier, *i.e.* si le diagramme ci-dessous est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } L' & \xrightarrow{\quad} & \text{Spec } L \\ & \searrow & \swarrow \\ & \text{Spec } k & \end{array}$$

alors on a un foncteur:

$$\rho_{LL'} : Tors(L, G_L) \longrightarrow Tors(L', G_{L'})$$

qui associe à un G_L -torseur $P \rightarrow \text{Spec } L$ le torseur $P_{L'} \rightarrow \text{Spec } L'$ obtenu par changement de base; le carré suivant est donc cartésien:

$$\begin{array}{ccc} P_{L'} & \xrightarrow{\quad} & P \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \text{Spec } L' & \xrightarrow{\quad} & \text{Spec } L \end{array}$$

Par ailleurs, le foncteur $\rho_{LL'}$ associe à un morphisme $f : P \rightarrow Q$ de G_L -torseurs sur L le morphisme $f_{L'} : P_{L'} \rightarrow Q_{L'}$ obtenu lui aussi par changement de base; le diagramme ci-dessous est donc commutatif:

$$\begin{array}{ccccc} & f_{L'} & & & f \\ P_{L'} & \nearrow & Q_{L'} & \xrightarrow{\quad} & Q \\ & \searrow & \downarrow & & \searrow \\ & \text{Spec } L' & \longrightarrow & \text{Spec } L & \end{array}$$

La collection des groupoïdes $Tors(L, G_L)$ (pour L parcourant les extensions étales de k) et les foncteurs $\rho_{LL'}$ constituent une catégorie fibrée en groupoïdes sur k . Cette

catégorie fibrée est notée $\text{Tors}(k, G)$: par définition, le groupoïde fibre $\text{Tors}(k, G)(L)$ de cette catégorie fibrée au-dessus d'un ouvert étale ($\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } k$) est justement le groupoïde $\text{Tors}(L, G_L)$. La catégorie fibrée $\text{Tors}(k, G)$ est un préchamp puisque les morphismes se recollent, et c'est un champ car les torseurs (qui sont des faisceaux) se recollent (toujours par la théorie classique de la descente).

Si l'on considère le cas particulier où $G = PGL_n$, on obtient le champ $\text{Tors}(k, PGL_n)$, et suivant que l'on interprète PGL_n comme le groupe d'automorphismes de M_n ou de \mathbb{P}^{n-1} , on obtient le k -champ $\text{Asc}(k, n)$ des k -algèbres simples centrales d'indice n , ou celui des variétés des k -variétés de Severi-Brauer de dimension $n - 1$, noté $\text{SB}(k, n - 1)$. En particulier, les champs $\text{Asc}(k, n)$ et $\text{SB}(k, n - 1)$ sont isomorphes, et l'isomorphisme de champs n'est autre que le foncteur qui permet d'associer à une algèbre simple centrale A la variété de Severi-Brauer X_A correspondante, ce foncteur étant décrit dans le chapitre 5 de [Ja00], ou encore dans [J96] III.3.5.

Exemple 1.4.3 (Le champ $\text{Tors}(S, G_S)$ des G_S -torseurs sur un schéma S). Soient S un schéma et G_S un S -schéma en groupes. On définit de la même manière que précédemment le champ $\text{Tors}(S, G_S)$ des G_S -torseurs sur S . Le groupoïde fibre de ce champ au-dessus d'un ouvert étale ($S' \rightarrow S$) a pour objets les $G_{S'}$ -torseurs¹¹ sur S' , et pour flèches les isomorphismes de $G_{S'}$ -torseurs sur S' . Lorsque l'on prend $G_S = \mathbb{G}_{m,S}$ (resp. $G_S = GL_{n,S}$, resp. $G_S = PGL_{n,S}$), on obtient le champ $\text{LBun}(S)$ des fibrés en droites sur S (resp. le champ $\text{VBun}(n, S)$ des fibrés vectoriels de rang n sur S , resp. le champ $\text{Az}(n, S)$ des algèbres d'Azumaya d'indice n sur S).

Exemple 1.4.4 (Champ associé à un schéma). Soient S un schéma et Y un S -schéma. On peut associer un S -champ à Y , que l'on note encore Y ; le groupoïde fibre de ce champ Y au-dessus d'un ouvert étale ($S' \rightarrow S$) le groupoïde discret¹² dont l'ensemble d'objets est: $\text{Hom}_S(S', Y)$. Un S -champ \mathfrak{X} est dit *représentable* s'il existe un S -schéma Y tel que le S -champ associé à Y par le procédé décrit ci-dessus et le S -champ \mathfrak{X} sont isomorphes. La présence d'automorphismes non-triviaux est donc clairement un obstacle à ce qu'un S -champ soit représentable par un schéma.

Cette correspondance entre schémas et champs nous permet d'interpréter le foncteur projection d'un champ comme un morphisme de champs. Considérons par exemple le champ des G -torseurs sur un corps k . Le foncteur projection relatif à ce champ:

$$p : \text{Tors}(k, G) \longrightarrow (\text{Spec } k)_{\text{ét}}$$

est celui qui associe à un torseur l'extension de k au-dessus de laquelle il est défini. Or, d'après ce qui précède, on peut associer au k -schéma $\text{Spec } k$ (!) un k -champ. En adoptant ce point de vue, le foncteur p devient un morphisme de champs.

Enfin, la construction du S -champ associé à un S -schéma donne lieu à un foncteur pleinement fidèle:

$$(\text{Sch}/S) \longrightarrow (\text{Champ}/S)$$

de la catégorie des S -schémas dans celle des S -champs, qui se factorise d'ailleurs par la catégorie des S -champs algébriques (cf. le chapitre 4 de [LMB00]).

¹¹On a noté $G_{S'}$ le schéma en groupes $G_S \times_S S'$.

¹²I.e. les seules flèches sont les identités.

Exemple 1.4.5 (Le champ \mathcal{M}_g des courbes stables de genre g ($g \geq 2$)). Soit S un schéma; rappelons que l'on appelle courbe stable (suivant [DM69]) de genre g sur S un morphisme

$$\pi : C \longrightarrow S$$

propre, plat, dont les fibres géométriques sont des schémas C_S de dimension 1, réduits, connexes, et tels que:

- C_S n'a que des points doubles ordinaires;
- si E est une composante rationnelle non-singulière de C_S , alors E rencontre les autres composantes de C_S en au moins trois points.

On note (SchEt) le site dont la catégorie sous-jacente est celle des schémas, munie de la topologie étale. Pour tout schéma S , on définit un groupoïde que l'on note $\mathcal{M}_{g,S}$ en posant:

Objets de $\mathcal{M}_{g,S}$: courbes stables de genre g sur S ;

isomorphismes de $\mathcal{M}_{g,S}$: S -isomorphismes de schémas.

La collection des $\mathcal{M}_{g,S}$ constitue une catégorie fibrée \mathcal{M}_g sur (SchEt), et \mathcal{M}_g est un champ de groupoïdes sur (SchEt) (cf. [Do01]). En outre, ce champ est isomorphe au quotient de H_g par $PGL(5g - 6)$, où H_g est le sous-schéma de $\text{Hilb}_{5g-6}^{P_g}$ des courbes stables tricanoniquement plongées dans \mathbb{P}^{5g-6} , où $P_g(n) = (6n - 1)(g - 1)$ est le polynôme de Hilbert (cf. [Do01] p.127-128).

Exemple 1.4.6 (Champ associé à un préchamp). Soit S un schéma. Pour construire le faisceau (sur le site étale de S) associé à un préfaisceau sur S , il suffit de rendre locale la définition de section, de telle sorte que le recollement des sections devient possible. De la même façon, on construit le S -champ associé à un S -préchamp en rendant locale la définition d'objet, de manière à forcer l'effectivité des données de descente. Ainsi, on obtient un foncteur:

$$(\text{Préchamp}/S) \longrightarrow (\text{Champ}/S)$$

et tout S -champ appartient localement à l'image essentielle de celui-ci [Br94a]. Plus précisément, si \mathcal{P} est un préchamp sur S , et si $(S' \rightarrow S)$ est un ouvert étale, une section du champ \mathcal{P}^+ associé à \mathcal{P} au-dessus de cet ouvert est la donnée:

- (i) d'un recouvrement étale $(S'_i \rightarrow S')_{i \in I}$;
- (ii) d'une famille de sections $(p_i)_{i \in I}$ du préchamp \mathcal{P} relativement à ce recouvrement: précisément, on demande que:

$$p_i \in \text{Ob}(\mathcal{P}(S'_i)), \quad \forall i \in I;$$

- (iii) (donnée de recollement) d'un isomorphisme de $\mathcal{P}(S'_i \times_{S'} S'_j)$:

$$\varphi_{ij} : p_j|_{S'_i \times_{S'} S'_j} \longrightarrow p_i|_{S'_i \times_{S'} S'_j}, \quad \forall (i, j) \in I \times I;$$

(iv) (*donnée de descente*) les isomorphismes φ_{ij} satisfaisant la condition de 1-cocycle¹³:

$$\varphi_{ij} \circ \varphi_{jk} = \varphi_{ik}, \quad \forall (i, j, k) \in I \times I \times I.$$

De fait, il existe une manière plus intrinsèque de définir le champ associé à un préchamp (nous renvoyons à la définition II.2.1.1 de [Gi71] pour celle-ci.)

1.5 Gerbes

Définition 1.5.1. Soit S un schéma. On appelle **gerbe sur S** (ou S -gerbe) un champ de groupoïdes \mathcal{G} sur le site étale de S , localement non-vide et localement connexe, soit:

- (\mathcal{G} est localement non-vide). Il existe un recouvrement étale $(S_i \rightarrow S)_{i \in I}$ tel que:

$$\text{Ob}(\mathcal{G}(S_i)) \neq \emptyset, \quad \forall i \in I.$$

- (\mathcal{G} est localement connexe). Soient $(S' \rightarrow S)$ un ouvert étale, et soient x et y deux objets de $\mathcal{G}(S')$. Alors il existe un recouvrement étale $(S'_j \rightarrow S')_{j \in J}$ tel que:

$$x|_{S'_j} \approx y|_{S'_j}$$

cet isomorphisme vivant dans le groupoïde $\mathcal{G}(S'_j)$, $\forall j \in J$.

Une S -gerbe est dite **neutre** si elle a une section au-dessus de S , i.e. si le groupoïde fibre $\mathcal{G}(S)$ est non-vide.

Un **morphisme de gerbes** sur S est un morphisme de champs dont la source et le but sont des S -gerbes.

Exemple 1.5.2 (Gerbes de torseurs). Soient S un schéma, et G_S un S -schéma en groupes. Le champ $\text{Tors}(S, G_S)$ de l'exemple 1.4.3 est une gerbe. En effet:

- le champ $\text{Tors}(S, G_S)$ est localement non-vide, puisqu'il l'est même globalement: le G_S -torseur trivial $S \times_S G_S \rightarrow S$ est en effet une section de ce champ au-dessus de S ;
- le champ $\text{Tors}(S, G_S)$ est localement connexe, puisque comme nous l'avons remarqué dans la section 1.2, tout G_S -torseur est isomorphe au G_S -torseur trivial, localement pour la topologie étale sur S .

D'ailleurs, il est intéressant de remarquer que toute gerbe neutre est de cette forme:

¹³C'est une manière rapide de dire que:

$$\varphi_{ij}|_{S'_i \times_{S'} S'_j \times_{S'} S'_k} \circ \varphi_{jk}|_{S'_i \times_{S'} S'_j \times_{S'} S'_k} = \varphi_{ik}|_{S'_i \times_{S'} S'_j \times_{S'} S'_k}, \quad \forall (i, j, k) \in I \times I \times I,$$

cette égalité ayant lieu dans $\text{Isom}(\mathcal{P}(S'_i \times_{S'} S'_j \times_{S'} S'_k))$.

Lemme 1.5.3. *Soit S un schéma. Toute S -gerbe neutre \mathcal{G} est équivalente à une S -gerbe de torseurs.*

PREUVE: soit \mathcal{G} une S -gerbe neutre, et soit g un objet de $\mathcal{G}(S)$. Alors on a une équivalence:

$$\epsilon : \mathcal{G} \longrightarrow \text{Tors}(S, \text{Aut}(g))$$

$$g' \longmapsto \text{Isom}(g, g')$$

où $\text{Aut}(g)$ (*resp.* $\text{Isom}(g, g')$) désigne le faisceau des automorphismes de l'objet g (*resp.* le faisceau des isomorphismes entre g et g').

□

On déduit immédiatement de ce lemme et de la définition de gerbe la conséquence suivante:

Corollaire 1.5.4. *Toute S -gerbe est localement équivalente à une gerbe de torseurs.*

PREUVE: soit \mathcal{G} une S -gerbe. Par définition, il existe un recouvrement étale $(S_i \rightarrow S)_{i \in I}$ tel que $\text{Ob}(\mathcal{G}(S_i)) \neq \emptyset$. Soit g_i un objet de $\mathcal{G}(S_i)$, pour tout $i \in I$. Alors les gerbes (sur le site étale restreint à S_i) $\mathcal{G}|_{S_i}$ et $\text{Tors}(S_i, \text{Aut}(g_i))$ sont équivalentes, où $\text{Aut}(g_i)$ est le faisceau sur S_i des automorphismes de g_i , et $\mathcal{G}|_{S_i}$ est le produit fibré $\mathcal{G} \times_S S_i$.

□

Exemple 1.5.5 (Gerbe des algèbres simples centrales sur un corps, etc...). Soit k un corps. D'après l'exemple 1.4.2, le champ $\text{Asc}(k, n)$ (*resp.* $\text{SB}(k, n - 1)$) des algèbres simples centrales sur k (*resp.* des variétés de Severi-Brauer de dimension $n - 1$) est une gerbe. En outre, les gerbes $\text{Asc}(k, n)$ et $\text{SB}(k, n - 1)$ sont équivalentes, puisque toutes deux sont équivalentes à la gerbe neutre $\text{Tors}(k, PGL_n)$.

De la même façon, lorsque S est un schéma, le champ $\text{LBun}(S)$ (*resp.* $\text{VBun}(n, S)$, *resp.* $\text{Az}(n, S)$) des fibrés en droites sur S (*resp.* des fibrés vectoriels de rang n sur S , *resp.* des algèbres d'Azumaya d'indice n sur S) est une gerbe neutre, équivalente à la gerbe $\text{Tors}(S, \mathbb{G}_{m,S})$ (*resp.* $\text{Tors}(S, GL_{n,S})$, *resp.* $\text{Tors}(S, PGL_{n,S})$).

Nous présentons maintenant la gerbe que nous évoquerons le plus souvent au cours de ce travail.

Exemple 1.5.6 (Gerbe des modèles d'un torseur). Soient k un corps de caractéristique nulle, X un k -schéma lisse et géométriquement connexe, G un k -groupe algébrique linéaire, et $\bar{P} \rightarrow \bar{X}$ un \bar{G}_X -torseur. Par analogie avec les revêtements, nous introduisons la définition suivante:

Définition 1.5.7. *On dit que \bar{P} est de **corps des modules** k s'il représente une classe de $H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)^\Gamma$. Il revient au même de dire que pour tout $\sigma \in \Gamma$, les torseurs \bar{P} et ${}^\sigma\bar{P}$ sont isomorphes.*

Définition 1.5.8. On conserve les hypothèses adoptées ci-dessus concernant k , X et G , et on suppose \bar{P} de corps des modules k .

- (i) L étant une extension étale de k , on appelle **modèle de \bar{P}** au-dessus de X_L un G_{X_L} -torseur $Y_L \rightarrow X_L$ tel que les \bar{G}_X -torseurs \bar{P} et $\overline{Y_L} = Y_L \times_{X_L} \bar{X}$ sont isomorphes.
- (ii) On appelle **gerbe des modèles de \bar{P}** , et on note $D(\bar{P})$ la k -gerbe dont le groupoïde fibre au-dessus d'un ouvert étale ($\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } k$) a pour objets les G_{X_L} -torseurs $Y_L \rightarrow X_L$ tel qu'il existe $\sigma \in \Gamma$ tel que les \bar{G}_X -torseurs ${}^\sigma \bar{P}$ et $\overline{Y_L}$ sont isomorphes.

$$\begin{array}{ccccccc}
& \bar{P} \approx \overline{Y_L} & \longrightarrow & Y_L & & & \\
& \downarrow & & \downarrow & & & \\
& \bar{G}_X & \longrightarrow & G_{X_L} & \longrightarrow & G_X & \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\bar{X} & \xrightarrow{\quad} & X_L & \xrightarrow{\quad} & X & \xrightarrow{\quad} & G \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
& \bar{G} & \longrightarrow & G_L & \longrightarrow & G & \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\text{Spec } \bar{k} & \xrightarrow{\quad} & \text{Spec } L & \xrightarrow{\quad} & \text{Spec } k & \xrightarrow{\quad} & G
\end{array}$$

Les flèches du groupoïde fibre $D(\bar{P})(L)$ sont les isomorphismes de G_{X_L} -torseurs sur X_L .

$D(\bar{P})$ est effectivement une k -gerbe, car:

- (1) c'est une catégorie fibrée en groupoïdes sur k , avec les foncteurs de “restriction” évidents;
- (2) c'est un k -champ, puisque les isomorphismes de torseurs se recollent, et toute donnée de descente sur les torseurs est effective (d'après [Gi71] III.1.4.1);
- (3) $D(\bar{P})$ est localement connexe, puisque deux objets sont isomorphes à \bar{P} (du fait que ${}^\sigma \bar{P} \approx \bar{P}, \forall \sigma \in \Gamma$);
- (4) $D(\bar{P})$ est localement non-vide: en effet (d'après [SGA4-VII], 5.7 pour le cas abélien, et 5.14.(a) pour le cas général):

$$H^1(\bar{X}, \bar{G}_X) = \varinjlim_L H^1(X_L, G_{X_L})$$

la limite directe étant prise sur les extensions étales L de k . Par suite, tout $[\bar{P}]$ est représenté par une classe $[Y_{L_0}] \in H^1(X_{L_0}, G_{X_{L_0}})$, pour une extension étale L_0/k “suffisamment grande”. Donc $D(\bar{P})$ est localement non-vide, puisque le singleton:

$$\{\text{Spec } L_0 \rightarrow \text{Spec } k\}$$

est un recouvrement étale de k .

Notons, même si c'est une évidence d'après la définition, que $D(\bar{P})$ est une gerbe neutre si et seulement si \bar{P} est défini sur k , i.e. si et seulement si \bar{P} a un modèle sur X . La gerbe $D(\bar{P})$ mesure donc l'obstruction à ce que la descente de \bar{P} soit possible.

Remarque 1.5.9. La gerbe $D(\bar{P})$ que l'on vient de définir est exactement la gerbe $D(c)$ décrite dans [Gi71] V.3.1.6.

Remarque 1.5.10. Dans le cas où G est abélien, et où la condition $\bar{G}_X(\bar{X}) = \bar{G}(\bar{k})$ est satisfaite, on peut associer à tout torseur \bar{P} représentant une classe dans $H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)^\Gamma$ un type $\lambda_{\bar{P}} \in \text{Hom}_\Gamma(\widehat{G}, \text{Pic } \bar{X})$. En outre, comme on l'a rappelé dans l'introduction, on dispose des deux suites exactes:

$$H^1(k, G) \longrightarrow H^1(X, G_X) \xrightarrow{u} H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)^\Gamma \xrightarrow{\delta^1} H^2(k, G) \longrightarrow H^2(X, G_X)$$

et:

$$H^1(k, G) \longrightarrow H^1(X, G_X) \xrightarrow{x} \text{Hom}_\Gamma(\widehat{G}, \text{Pic } \bar{X}) \xrightarrow{\partial} H^2(k, G) \longrightarrow H^2(X, G_X)$$

L'image de \bar{P} par le morphisme δ^1 est la classe de la gerbe $D(\bar{P})$ (cf. [Gi71] V.3.2.1). D'autre part, la gerbe $\partial(\lambda_{\bar{P}})$, qui mesure l'obstruction à ce qu'il existe un G_X -torseur sur X de type $\lambda_{\bar{P}}$, coïncide avec $D(\bar{P})$ (cf. [HS02] 3.7.(c)). Par conséquent:

Proposition 1.5.11. *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

- (i) \bar{P} est défini sur k ;
- (ii) la gerbe $D(\bar{P})$ est neutre;
- (iii) la gerbe $\partial(\lambda_{\bar{P}})$ est neutre;
- (iv) il existe un G_X -torseur sur X de type $\lambda_{\bar{P}}$.

PREUVE: évidente, d'après la remarque précédente et les définitions des gerbes $D(\bar{P})$ et $\partial(\lambda_{\bar{P}})$.

□

Exemple 1.5.12 (Gerbe des modèles d'un G -revêtement). La définition de la gerbe des modèles d'un G -revêtements (satisfaisant la condition corps des modules) présente beaucoup de points communs avec la gerbe des modèles d'un torseur. Nous renvoyons à la section 2 de [DD87] pour une présentation et une étude détaillées de cette gerbe.

Exemple 1.5.13 (Gerbe des banalisations d'une algèbre d'Azumaya). Soit X un schéma régulier et géométriquement irréductible. On suppose que X est connexe, de telle

sorte que les algèbres d’Azumaya sur X sont d’indice constant¹⁴ (*cf.* [Mi80] p.143). Soit \mathcal{A} une algèbre d’Azumaya sur X . On appelle *banalisation* de \mathcal{A} un couple (\mathcal{E}, α) , où \mathcal{E} est une \mathcal{O}_X -algèbre localement libre de type fini, et α est un isomorphisme de \mathcal{O}_X -algèbres:

$$\alpha : \mathrm{End}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{A}$$

¹⁴I.e. tous les n_i sont égaux dans l’exemple 1.2.9.

On définit la gerbe des banalisations $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ de \mathcal{A} ainsi: au-dessus d'un ouvert étale $(X' \rightarrow X)$, le groupoïde fibre $[\mathcal{B}(\mathcal{A})](X')$ est le groupoïde dont:

- les objets sont les banalisations de $\mathcal{A}|_{X'} = \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X'}$. Ce sont donc les couples (\mathcal{E}', α) , \mathcal{E}' étant une $\mathcal{O}_{X'}$ -algèbre localement libre de type fini, et α un isomorphisme de $\mathcal{O}_{X'}$ -algèbres:

$$\alpha : \text{End}_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathcal{E}') \longrightarrow \mathcal{A}|_{X'}$$

- une flèche entre deux banalisations $(\mathcal{E}_1, \alpha_1)$ et $(\mathcal{E}_2, \alpha_2)$ est un isomorphisme de $\mathcal{O}_{X'}$ -algèbres ψ rendant commutatif le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \text{End}_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathcal{E}_1) & \xrightarrow{\psi} & \text{End}_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathcal{E}_2) \\ \searrow \alpha_1 & & \swarrow \alpha_2 \\ & \mathcal{A}|_{X'} & \end{array}$$

Alors la théorie de la descente assure que $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ est un champ, et c'est une gerbe d'après l'énoncé ci-dessous (*cf.* [Gr68] I.5.1 ou [Mi80] IV.4.2.1):

Proposition 1.5.14. *Soit \mathcal{A} une \mathcal{O}_X -algèbre qui est de type fini en tant que \mathcal{O}_X -module. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

- (i) \mathcal{A} est une algèbre d'Azumaya sur X ;
- (ii) il existe un recouvrement étale $(X_i \rightarrow X)_{i \in I}$ tel que $\mathcal{A}|_{X_i}$ soit banale, $\forall i \in I$; plus précisément, il existe pour tout $i \in I$ un entier n_i tel que: $\mathcal{A}|_{X_i} \approx M_{n_i}(\mathcal{O}_{X_i})$

Exemple 1.5.15 (Gerbe des trivialisations d'un espace homogène). Soient k un corps de caractéristique nulle, dont on fixe une clôture algébrique \bar{k} , et H un sous-groupe fini de $SL_n(k)$. Soit V un espace homogène sous SL_n avec isotropie H : on entend par là que V est une k -forme de SL_n/H , *i.e.* on a un isomorphisme sur \bar{k} :

$$\bar{V} \approx S\bar{L}_n/\bar{H}$$

On a la relation de domination de Springer [Sp66]:

$$H^1(k, SL_n) \multimap H^1(k; SL_n, H)$$

L'espace homogène V représente une classe de $H^1(k; SL_n, H)$. La gerbe $\mathcal{T}(V)$ que l'on va associer à V mesure l'obstruction à ce que $[V]$ appartienne à l'image de la relation. Or, comme $H^1(k, SL_n)$ est réduit à la classe du torseur trivial (par le théorème 90 de Hilbert), toute classe appartenant à l'image de la relation est triviale. D'où l'appellation de gerbe des trivialisations de V . Définissons maintenant cette gerbe: le groupoïde fibre $[\mathcal{T}(V)](L)$ au-dessus d'un ouvert étale $(\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } k)$ a pour objets les SL_n -torseurs P_L (forcément triviaux) sur L tels qu'il existe une application: $f_L : P_L \rightarrow V_L$, et pour flèches les isomorphismes de torseurs. C'est effectivement une gerbe d'après [Sp66] 2.

Exemple 1.5.16 (Classe de Chern d'un fibré en droites). Soient X une variété projective lisse complexe, X^{an} la variété analytique associée [Fu98], et \mathcal{L} un fibré en droites sur X . Nous verrons en appendice comment interpréter la classe de Chern $c_1(\mathcal{L})$ comme une gerbe sur le site analytique de X , mesurant l'obstruction à ce que \mathcal{L} appartienne à l'image du morphisme:

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \text{Pic } X$$

Donnons maintenant deux exemples de champs qui ne sont pas des gerbes:

Exemple 1.5.17 (Le champ \mathcal{M}_g). Ce champ n'est pas une gerbe car il possède un ouvert¹⁵ (non-vide) de courbes ne possédant pas d'automorphisme non-trivial. Or nous verrons dans la section suivante que les gerbes se différencient des champs par ce que les objets d'une gerbe ont tous (localement) les mêmes automorphismes.

Exemple 1.5.18 (Le champ $\pi_*\text{Tors}(X, G_X)$). On considère une nouvelle fois un corps de caractéristique nulle k , un k -schéma $\pi : X \rightarrow \text{Spec } k$, et un k -groupe algébrique linéaire G . En général, le champ $\pi_*\text{Tors}(X, G_X)$ n'est pas une gerbe. Rappelons que ce k -champ a pour catégorie fibre au-dessus d'un ouvert étale ($\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } k$) la catégorie $\text{Tors}(X_L, G_{X_L})$ des G_{X_L} -torseurs sur X_L . C'est une catégorie fibrée en groupoïdes sur k munie des foncteurs de restriction évidents, c'est un préchamp car les isomorphismes de torseurs se recollent, et c'est un champ car les torseurs sur X constituent un champ. En outre, ce champ est localement non-vide, et même globalement non-vide puisque le G_X -torseur trivial $X \times G_X$ est un objet de ce champ au-dessus de $\text{Spec } k$. Mais deux objets ne sont pas nécessairement localement isomorphes (ce champ n'est pas localement connexe): étant donnés ($\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } k$) un ouvert étale de k , deux G_{X_L} -torseurs P et Q sur X_L , il existe certes un recouvrement étale $(X_i \rightarrow X_L)_{i \in I}$ tel que:

$$P|_{X_i} \approx Q|_{X_i}, \quad \forall i \in I.$$

Cependant, les ouverts de ce recouvrement n'ont aucune raison de provenir d'un recouvrement étale de L ; plus explicitement, il n'y a aucune raison pour que les schémas X_i soient de la forme X_{L_i} , où les L_i seraient des extensions étales de L . Donc P et Q , vus comme objets de:

$$[\pi_*\text{Tors}(X, G_X)](L)$$

ne sont pas localement isomorphes.

Cet exemple illustre donc le fait que l'image directe d'une gerbe par un morphisme de schémas n'est pas en général une gerbe, alors que l'image inverse d'une gerbe est toujours une gerbe [Gi71] V.1.4.2.

1.6 Liens

Avant de donner la définition de lien en général, nous donnons juste idée pratique de cette notion. Remarquons tout d'abord que par définition, deux objets g et g' d'une gerbe \mathcal{G} sur un schéma S sont localement isomorphes. Il s'ensuit que g et g' ont localement

¹⁵Pour la définition d'ouvert d'un champ algébrique, nous renvoyons à [LMB00] ou [Vi89].

le même faisceau d'automorphismes, l'isomorphisme entre ces faisceaux étant obtenu par conjugaison:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Aut}(g) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(g') \\ f & \longmapsto & \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} \end{array}$$

où φ est un isomorphisme entre g et g' . L'idée qui s'impose donc naturellement, lorsque l'on souhaite classifier les gerbes sur un schéma S , est d'associer à chaque S -gerbe un "faisceau en groupes" sur S . C'est ce qui justifie l'introduction de la notion de lien.

Le champ des liens sur un schéma

Soit S un schéma. Les faisceaux de groupes sur S constituent un S -champ noté (FAGR/S) (cf. [Gi71] II.3.4.12). Pour tout ouvert étale $(S' \rightarrow S)$, la catégorie fibre

$$(\mathrm{FAGR}/S)(S' \rightarrow S)$$

est la catégorie $\mathrm{FAGR}(S')$ des faisceaux de groupes sur le site étale de S' . Le préchamp des liens est construit en deux temps à partir de ce champ:

Définition 1.6.1. On note (Lien/S) la catégorie fibrée sur S , dont la catégorie fibre $(\mathrm{Lien}/S)(S')$ au-dessus d'un ouvert étale $(S' \rightarrow S)$ a pour objets les faisceaux de groupes sur S' ; les morphismes entre deux objets \mathcal{F} et \mathcal{G} sont les sections du faisceau quotient:

$$\mathrm{Int}(\mathcal{F}) \setminus \mathrm{Hom}_{\mathrm{FAGR}(S')}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) / \mathrm{Int}(\mathcal{G})$$

Proposition 1.6.2. La S -catégorie fibrée (Lien/S) est un S -préchamp, le préchamp des liens sur S . On appelle **champ des liens sur S** et on note (LIEN/S) le champ qui lui est associé par le foncteur (cf. exemple 1.4.6):

$$(\mathrm{Préchamp}/S) \longrightarrow (\mathrm{Champ}/S)$$

On appelle **lien sur S** un objet du champ (LIEN/S) . Notons que l'on peut associer à tout faisceau de groupes G sur S un lien sur S , cette association étant obtenue en grâce au foncteur composé:

$$\mathrm{lien} : (\mathrm{FAGR}/S) \longrightarrow (\mathrm{Lien}/S) \longrightarrow (\mathrm{LIEN}/S).$$

Un lien sur S (ou S -lien) est dit **représentable** s'il appartient à l'image essentielle de ce foncteur; autrement dit, un lien \mathcal{L} sur S est représentable par un faisceau de groupes G s'il existe un isomorphisme de liens sur S :

$$\mathcal{L} \approx \mathrm{lien} G$$

Un lien \mathcal{L} sur S est dit **localement représentable** par un faisceau de groupes G sur S s'il existe un recouvrement étale $(S_i \rightarrow S)$ et des isomorphismes de liens sur S_i :

$$\mathcal{L}|_{S_i} \approx \mathrm{lien}(G|_{S_i})$$

Par construction même, tout lien sur S est localement représentable par un faisceau de groupes.

Enfin, un lien \mathcal{L} sur S est dit **réalisable** s'il existe une S -gerbe \mathcal{G} telle que:

$$\mathrm{lien}(\mathcal{G}) \approx \mathcal{L}$$

Définition 1.6.3. Soient S un schéma, G un faisceau de groupes sur S et \mathcal{G} une S -gerbe. On dit que \mathcal{G} est **liée par** G si $\text{lien}(\mathcal{G})$ est représentable par G . On dit que \mathcal{G} est **localemement liée par** G si $\text{lien}(\mathcal{G})$ est localement représentable par G . Il suffit pour cela qu'il existe pour tout ouvert étale $(S' \rightarrow S)$ et pour tout $g' \in \text{Ob}(\mathcal{G}(S'))$ des isomorphismes fonctoriels ([Mi80] p.144):

$$G_S(S') \longrightarrow \text{Aut}_{\mathcal{G}(S')}(g')$$

Exemple 1.6.4. On se place dans la situation de l'exemple 1.5.6, et on considère \bar{P} un \bar{G}_X -torseur de corps des modules k . Alors:

Lemme 1.6.5. Si G est abélien, alors:

- (i) la k -gerbe $D(\bar{P})$ est liée par $\pi_* G_X$;
- (ii) si de plus la condition $\bar{G}_X(\bar{X}) = \bar{G}(\bar{k})$ est satisfaite, alors $D(\bar{P})$ est liée par G .

PREUVE: En effet, soit $(\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } k)$ un ouvert étale tel que le groupoïde fibre $D(\bar{P})(L)$ soit non-vide, et soit P_L un de ses objets. La gerbe $D(\bar{P})|_{\text{Spec } L}$ est donc neutre(!), et elle est donc équivalente à une gerbe de torseurs sur L . Explicitelement, on a une équivalence de L -gerbes [Gi71] V.3.1.6.(ii):

$$\begin{aligned} \epsilon : D(\bar{P})|_{\text{Spec } L} &\longrightarrow \text{Tors}\left(L, \pi_* \text{ad}_{G_{X_L}}(P_L)\right) \\ P' &\longmapsto \pi_*\left(P' \wedge^{G_{X_L}} P_L^{\text{opp}}\right) \end{aligned}$$

où P_L^{opp} désigne le bitorseur opposé à P_L , vu comme un $(\text{ad}_{G_{X_L}}(P_L), G_{X_L})$ -bitorseur. On vérifie ensuite que π_* et ad commutent, ce qui est immédiat; enfin, comme G est abélien, le faisceau $\text{ad}_{\pi_* G_{X_L}}(\pi_* P_L)$ n'est autre que le faisceau $\pi_* G_{X_L}$, d'où le point (i).

Pour le point (ii) on utilise le fait que la condition $\bar{G}_X(\bar{X}) = \bar{G}(\bar{k})$ implique que les faisceaux $\pi_* G_X$ et G sont isomorphes (*cf.* preuve du lemme 1.2.14).

□

Exemple 1.6.6. La gerbe des modèles d'un G -revêtement est liée par le centre de G (*cf.* [DD97]).

Exemple 1.6.7. La gerbe des banalisations d'une algèbre d'Azumaya sur un schéma X est liée par $\mathbb{G}_{m,X}$ (*cf.* [Gi71] V.4.2 ou [Mi80] p.145).

Exemple 1.6.8. La classe de Chern d'un fibré en droites sur une variété analytique X , vue comme une gerbe sur le site analytique de X^{an} , est liée par $\mathbb{Z}_{X^{an}}$ (*cf.* appendice A).

L'énoncé suivant est encore traité dans le cas général dans [Gi71] (corollaire IV.1.1.7.3).

Proposition 1.6.9. Soient S un schéma et G un faisceau de groupes sur S . L'ensemble des classes d'isomorphie de liens localement représentables par G est en bijection avec l'ensemble de cohomologie $H^1(k, \text{Out } G)$, où $\text{Out } G$ est le faisceau sur S des automorphismes extérieurs de G .

Remarque 1.6.10. L'ensemble $H^1(S, \text{Out } G)$ des formes extérieures est pointé par la classe du $\text{Out } G$ -torseur trivial; ce dernier correspond au S -lien lien G .

Soient S un schéma et G un faisceau de groupes sur S . On a toujours la suite exacte de faisceaux de groupes sur S :

$$0 \longrightarrow \text{Int } G \longrightarrow \text{Aut } G \longrightarrow \text{Out } G \longrightarrow 1$$

d'où une suite de cohomologie (déjà évoquée, voir diagramme p. 14):

$$H^1(S, \text{Int } G) \longrightarrow H^1(S, \text{Aut } G) \xrightarrow{\lambda} H^1(S, \text{Out } G)$$

L'application λ est juste celle qui associe à une forme¹⁶ (sur S) de G le lien qu'elle représente. Un lien est donc représentable par G s'il appartient à l'image de λ . En outre, on déduit facilement de l'exactitude de cette suite l'énoncé:

Lemme 1.6.11. Avec les notations adoptées précédemment, si G' est une S -forme intérieure de G , alors:

$$\text{lien } G' \approx \text{lien } G$$

Une conséquence beaucoup moins immédiate de l'exactitude de la suite précédente est la suivante:

Proposition 1.6.12. Soient S un schéma, G_S un schéma en groupes réductifs sur S . Alors tout S -lien localement (pour la topologie étale) représentable par G_S est représentable par une S -forme de G_S .

PREUVE: soit \mathcal{L} un S -lien localement représentable par G_S . \mathcal{L} représente une classe de $H^1(S, \text{Out } G_S)$. Du fait que G_S est réductif, la suite:

$$1 \longrightarrow \text{Int } G_S \longrightarrow \text{Aut } G_S \xrightarrow{\sigma} \text{Out } G_S \longrightarrow 1$$

est scindée [Dem64] p.28. Cette section induit une section de l'application:

$$H^1(S, \text{Aut } G_S) \xrightarrow{\lambda} H^1(S, \text{Out } G_S) \xrightarrow{\sigma^{(1)}}$$

¹⁶Rappelons que l'on appelle S -forme d'un objet A défini sur S un objet A' défini sur S , localement isomorphe à A pour la topologie étale sur S . Par exemple, une k -variété de Severi-Brauer de dimension n est une k -forme de l'espace projectif \mathbb{P}_k^n ; une k -algèbre simple centrale d'indice n est une k -forme de l'algèbre de matrices $M_n(k)$; une algèbre d'Azumaya d'indice n sur S est une S -forme de la \mathcal{O}_S -algèbre $M_n(\mathcal{O}_S)$, etc...

d'où la conclusion.

□

Remarque 1.6.13. Nous avons délibérément choisi de nous restreindre à la topologie étale, en vue de nos applications. Signalons cependant que cet énoncé est valable dans un cadre beaucoup plus général (*cf.* [Do76] V.3.2).

1.7 Cohomologie à valeurs dans un lien

Définition 1.7.1. Soient S un schéma et \mathcal{L} un S -lien. On définit l'ensemble

$$H^2(S, \mathcal{L})$$

comme l'ensemble des classes d'équivalence de S -gerbes de lien \mathcal{L} pour la relation d'équivalence suivante: \mathcal{G} et \mathcal{G}' sont dites **équivalentes au sens de Giraud** s'il existe une équivalence $\epsilon : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ liée par $\text{id}_{\mathcal{L}}$. On note $[\mathcal{G}]$ la classe d'une S -gerbe de lien \mathcal{L} .

Exemple 1.7.2. Soient S un schéma, G_S un S -schéma en groupes, et G'_S une S -forme intérieure de G_S . Alors les gerbes $\text{Tors}(S, G_S)$ et $\text{Tors}(S, G'_S)$ ont évidemment même lien (d'après le lemme 1.6.11), et ce lien n'est autre que lien G_S . En outre, il existe une équivalence

$$\epsilon : \text{Tors}(S, G_S) \longrightarrow \text{Tors}(S, G'_S)$$

mais ϵ n'est pas forcément liée par l'identité. En effet, on déduit de la suite exacte de faisceaux:

$$0 \longrightarrow Z(G_S) \longrightarrow G_S \longrightarrow \text{Int } G_S \longrightarrow 0$$

une suite longue d'ensembles pointés:

$$H^1(S, G_S) \xrightarrow{\alpha} H^1(S, \text{Int } G_S) \xrightarrow{\beta} H^2(S, Z(G_S))$$

Comme nous le verrons bientôt, le groupe $H^2(S, Z(G_S))$ agit simplement transitivement sur l'ensemble $H^2(S, \text{lien } G_S)$; en outre, la proposition IV.3.2.6 de [Gi71] assure que l'ensemble $H^1(S, \text{Int } G_S)$ "agit" transitivement (par l'intermédiaire de β) sur l'ensemble $H^2(S, \text{lien } G_S)$ des classes neutres de S -gerbes liées par G_S .

Par conséquent, les gerbes $\text{Tors}(S, G_S)$ et $\text{Tors}(S, G'_S)$ ne sont équivalentes (au sens de Giraud) que si G'_S est une S -forme intérieure de G_S telle que:

$$\beta([G'_S]) = 0 \in H^2(S, Z(G_S))$$

Remarquons pour conclure cet exemple que si G'_S est une S -forme intérieure de G_S , alors les gerbes $\text{Tors}(S, G_S)$ et $\text{Tors}(S, G'_S)$ sont équivalentes *au sens de Breen* (*cf.* [Br94a]), *i.e.* représentent la même classe dans:

$$H^1(S, G_S \rightarrow \text{Aut } G_S)$$

Avant d'aller plus loin, commençons par quelques faits et remarques élémentaires concernant le H^2 à valeurs dans un lien.

Fait 1.7.3. Soient S un schéma et \mathcal{L} un S -lien. L'ensemble $H^2(S, \mathcal{L})$ est non-vide si et seulement si \mathcal{L} est réalisable.

PREUVE: triviale, d'après la définition de lien réalisable.

□

Fait 1.7.4. Soient S un schéma et \mathcal{L} un S -lien. Soient \mathcal{G} et \mathcal{G}' deux S -gerbes équivalentes (au sens de Giraud ou non) de lien \mathcal{L} . Si \mathcal{G} est neutre, alors \mathcal{G}' est également neutre. On appelle **classe neutre** de $H^2(S, \mathcal{L})$ une classe de S -gerbes équivalentes au sens de Giraud et de lien \mathcal{L} dont un (donc tous, par ce qui précède) représentant est neutre.

PREUVE: si \mathcal{G} est neutre, alors elle a une section au-dessus de S . L'équivalence entre \mathcal{G} et \mathcal{G}' fournit alors une section de \mathcal{G}' au-dessus de S . Donc \mathcal{G}' est neutre à son tour.

□

Fait 1.7.5. Soient S un schéma et G_S un schéma en groupes sur S . Alors l'ensemble $H^2(S, \text{lien } G_S)$ possède une classe privilégiée:

$$[\text{Tors}(S, G_S)]$$

On l'appelle la **classe triviale** de $H^2(S, \text{lien } G_S)$.

L'ensemble $H^2(S, \text{lien } G_S)$ possède donc toujours cette classe triviale, mais il peut aussi (d'après l'exemple 1.7.2) posséder plusieurs classes neutres, différentes de la classe triviale. Explicitement, avec les notations du fait ci-dessus, soit G'_S une S -forme intérieure de G_S . Si $\beta([G'_S]) \neq 0$, alors la gerbe $\text{Tors}(S, G'_S)$ n'est pas équivalente (au sens de Giraud) à la gerbe $\text{Tors}(S, G_S)$. Dans cette situation donc, la classe $[\text{Tors}(S, G'_S)]$ est une classe neutre de $H^2(S, \text{lien } G_S)$, différente de la classe triviale.

Evidemment, la situation est nettement plus simple si l'on considère un schéma en groupes abéliens:

Fait 1.7.6. Soient S un schéma et G_S un S -schéma en groupes abéliens. L'ensemble $H^2(S, \text{lien } G_S)$ possède une unique classe neutre, qui est la classe triviale: $[\text{Tors}(S, G_S)]$.

PREUVE: puisque G_S est abélien, il ne possède pas d'automorphisme intérieur non-trivial. La suite exacte de cohomologie (*cf.* section précédente):

$$H^1(S, \text{Int } G_S) \longrightarrow H^1(S, \text{Aut } G_S) \xrightarrow{\lambda} H^1(S, \text{Out } G_S)$$

se réduit alors à l'identité:

$$H^1(S, \text{Aut } G_S) \xrightarrow{\text{id}} H^1(S, \text{Aut } G_S)$$

Autrement dit, il existe un unique (à isomorphisme près) S -lien localement représentable par G_S : le lien lien G_S lui-même, d'où le fait.

□

Dans ce cas, on pourra noter 0 cette unique classe neutre (et on pourra alors parler de *classe nulle*). En effet:

Fait 1.7.7. *Soient S un schéma et G_S un S -schéma en groupes abéliens. L'ensemble $H^2(S, \text{lien } G_S)$ possède une loi de groupe. De plus les groupes $H^2(S, \text{lien } G_S)$ et $H_{\text{ét}}^2(S, G_S)$ sont isomorphes.*

PREUVE: c'est la proposition IV.3.5.1 de [Gi71].

□

Enfin le théorème suivant est d'une importance capitale, puisqu'il permet de réduire la cohomologie à valeurs dans un lien à celle de son centre:

Fait 1.7.8 (Théorème IV.3.3.3 de [Gi71]). *Soient S un schéma et \mathcal{L} un S -lien. Alors l'ensemble $H^2(S, \mathcal{L})$ est un pseudo-torseur sous $H^2(S, Z(\mathcal{L}))^{17}$, $Z(\mathcal{L})$ désignant le centre du lien \mathcal{L} .*

Dans le cas particulier où $\mathcal{L} = \text{lien } G$ est représentable par un faisceau de groupes G sur S , l'ensemble $H^2(S, \text{lien } G)$ est principal homogène sous l'action de $H^2(S, Z(G))$ (puisque le centre de lien G est représentable par le centre de G [Gi71] IV.1.5.3.(iii)).

Définition 1.7.9. *Soient S un schéma et \mathcal{L} un S -lien. Nous dirons que l'ensemble $H^2(S, \mathcal{L})$ est **inessentiel** s'il est non-vide et s'il n'est composé que de classes neutres.*

D'après le fait précédent, lorsque G est un faisceau de groupes abéliens sur S , l'ensemble $H^2(S, \text{lien } G)$ est inessentiel si et seulement si il est réduit à la classe nulle.

Voici maintenant un exemple de situation particulièrement important où le H^2 est inessentiel, et qui est en partie une conséquence du fait 1.7.8.

Théorème 1.7.10. *Soient k un corps de caractéristique nulle et G un k -groupe algébrique. Alors l'ensemble $H^2(k, \text{lien } G)$ est inessentiel dans les cas suivants:*

- (i) G est semi-simple adjoint;
- (ii) k est un corps de nombres purement imaginaires et G est semi-simple;
- (iii) k est un corps de nombres et G est semi-simple simplement connexe.

PREUVE: pour les cas (ii) et (iii), c'est le théorème VI.3.2 de [Do76]. Pour le cas où G est semi-simple adjoint, commençons par noter que l'ensemble $H^2(k, \text{lien } G)$ n'est

¹⁷I.e. $H^2(S, \mathcal{L})$ est vide ou principal homogène sous l'action de $H^2(S, Z(\mathcal{L}))$.

pas vide, puisqu'il possède au moins la classe triviale. D'après le fait 1.7.8, il est donc principal homogène sous $H^2(k, Z(G))$. Or, G étant adjoint, son centre est trivial. Donc le groupe $H^2(k, Z(G))$ est nul, et l'ensemble $H^2(k, \text{lien } G)$ est réduit à la classe triviale. En particulier, il est inessentiel.

□

Pourachever ce chapitre, nous donnons deux exemples d'application de ce théorème.

Corollaire 1.7.11. *Soient k un corps de caractéristique nulle, et G une k -forme de PGL_n . Toute k -gerbe de lien $\text{lien } G$ est neutre.*

PREUVE: c'est une conséquence directe du théorème 1.7.10, puisque PGL_n est semi-simple adjoint.

□

Corollaire 1.7.12. *Si k est un corps de nombres, l'application:*

$$\delta_n : H^1(k, PGL_n) \longrightarrow {}_n\text{Br } k$$

est bijective. Autrement dit, tout élément d'ordre n dans $\text{Br } k$ est l'image par δ_n d'une k -algèbre simple centrale d'indice n . En termes de gerbes, cela revient à dire que toute k -gerbe liée par μ_n (c'est en particulier un k -champ de Deligne-Mumford) est la gerbe des trivialisations d'une k -algèbre simple centrale d'indice n .

PREUVE: de la suite exacte de faisceaux sur k :

$$0 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow SL_n \longrightarrow PGL_n \longrightarrow 1$$

on déduit l'existence d'une application injective¹⁸:

$$1 \longrightarrow H^1(k, PGL_n) \xrightarrow{\delta_n} H^2(k, \mu_n) = {}_n\text{Br } k$$

Soit $[\mathcal{G}] \in {}_n\text{Br } k$. L'obstruction à ce que cette classe appartienne à l'image de δ_n est mesurée par une gerbe dont le lien est représentable par une forme de SL_n [Gi71] IV.4.2.10. Comme SL_n est semi-simple simplement connexe, cette gerbe est neutre d'après le théorème 1.7.10. Donc δ_n est bijective.

□

Remarque 1.7.13. En fait, il est déjà connu que cette application est bijective dans bien d'autres cas que les corps de nombres (*cf.* [CTGP03]). Remarquons aussi qu'il existe des corps sur lesquels δ_n n'est pas bijective; c'est le cas du corps K_M construit par Merkurjev pour obtenir un contre-exemple à une conjecture de Kaplansky [Me91]. Il existe en effet sur K_M une algèbre simple centrale d'indice 4, mais d'esposant 2 (*i.e.* dont l'image dans

¹⁸La seule trivialité de l'ensemble $H^1(k, SL_n)$ n'entraîne pas l'injectivité de δ^n *cf.* [Ja00].

$\text{Br } k$ est d'ordre 2). Une telle algèbre simple centrale représente donc une classe de $H^1(K_M, PGL_4)$ dont l'image par l'isomorphisme:

$$\Delta : \text{Br}_{Az} K_M \longrightarrow \text{Br } K_M$$

appartient à ${}_2\text{Br } K_M$. Il s'ensuit que l'application:

$$\delta_2 : H^1(K_M, PGL_2) \longrightarrow H^2(K_M, \mu_2) = {}_2\text{Br } K_M$$

n'est pas surjective.

Par conséquent:

Corollaire 1.7.14. *Il existe une K_M -forme SL'_2 de SL_2 telle que $H^2(K_M, \text{lien } SL'_2)$ possède une classe non-neutre.*

Chapter 2

Descente de torseurs et points rationnels: le cas abélien

Dans [DD87], Dèbes et Douai montrent que l'obstruction à ce qu'un G -revêtement $\bar{f} : \bar{X} \rightarrow \bar{B}$ de corps des modules k soit défini sur k est mesurée par une gerbe (la gerbe des modèles $\mathcal{G}(f)$ du G -revêtement) localement liée par le centre de G . Si G est abélien, ou si $Z(G)$ est un facteur direct de G , cette gerbe est neutre lorsque la suite exacte de groupes fondamentaux:

$$1 \longrightarrow \Pi_{\bar{k}}(\bar{B}^*) \longrightarrow \Pi_k(B^*) \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1$$

est scindée (où $B^* = B - D$, D étant le lieu de ramification du G -revêtement). C'est en particulier le cas lorsque la base du revêtement possède un point k -rationnel (en dehors du lieu de ramification). L'objectif de ce chapitre est d'obtenir le même type d'énoncé pour les torseurs sous un schéma en groupes abéliens.

On se place donc dans la situation suivante: k est un corps de caractéristique nulle, dont on fixe une clôture algébrique \bar{k} et dont on note Γ le groupe de Galois absolu; X est un k -schéma géométriquement connexe, quasi-compact et quasi-séparé, $\pi : X \rightarrow \text{Spec } k$ est le morphisme structural, et G est un k -groupe algébrique linéaire abélien.

Une première idée consiste à utiliser la suite spectrale de Leray attachée à cette situation:

$$E_2^{p,q} = H^p(k, R^q \pi_* G_X) \implies H^{p+q}(X, G_X) = E^{p+q}$$

Dans ce que nous serons amenés à considérer comme les “bons cas” (*i.e.* lorsque la condition $\bar{G}_X(\bar{X}) = \bar{G}(\bar{k})$ est satisfaite), la suite exacte à 5 termes associée à la suite spectrale ci-dessus s'écrit:

$$0 \longrightarrow H^1(k, G) \longrightarrow H^1(X, G_X) \xrightarrow{u} H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)^\Gamma \xrightarrow{\delta^1} H^2(k, G) \xrightarrow{v} H^2(X, G_X)$$

Cette suite est évidemment parfaitement adaptée à notre problème de descente, puisqu'on y lit directement l'obstruction à ce qu'un \bar{G}_X -torseur \bar{P} sur \bar{X} de corps des modules k soit défini sur k . Plus précisément, le morphisme δ^1 défini en algèbre homologique a une interprétation en termes de gerbes: c'est celui qui associe à une classe $[\bar{P}]$ la classe d'équivalence $[D(\bar{P})]$ de la gerbe d'un quelconque de ses représentants (*cf.* [Gi71] V.3.1.4.1). Dire que \bar{P} est défini sur k , c'est exactement dire que $[\bar{P}]$ appartient à l'image de u , ce qui équivaut donc à la nullité de la gerbe $D(\bar{P}) \in H^2(k, G)$. Nous verrons que l'existence d'un point k -rationnel sur X entraîne alors que tout \bar{G}_X sur \bar{X} de corps

des modules k est défini sur k , ou de façon équivalente, que le morphisme u est surjectif. Notons que cette approche fournit, à peu de frais, des résultats sur la descente des G -revêtements abéliens.

Dans la deuxième section, on s'intéresse à ce qui se passe en général, si l'on n'impose plus la condition $\bar{G}_X(\bar{X}) = \bar{G}(\bar{k})$. Nous montrons que le point-clef est finalement la comparaison entre les faisceaux (sur k) G et π_*G_X . Pour illustrer les différences entre cette situation et celle de la première section, on s'intéresse en particulier à une variété X telle que:

$$\mathbb{G}_{m,\bar{X}}(\bar{X}) \neq \mathbb{G}_{m,\bar{k}}(\bar{k})$$

Plus précisément, on a:

$$\bar{k}[X]^* = \bar{k}^* \oplus \mathbb{Z}$$

Dans cette situation particulière, l'existence d'un point k -rationnel ne suffit pas à ce que tout $\mathbb{G}_{m,\bar{X}}$ -torseur sur \bar{X} de corps des modules k soit défini sur k .

Enfin, nous nous plaçons dans la dernière section sur un corps de nombres, et nous utilisons un résultat de Skorobogatov qui assure que la descente des torseurs sous des groupes abéliens sur des “bonnes variétés” est possible dès qu'il existe sur X des points adéliques d'un certain type, ce qui est plus faible que de demander l'existence de points k -rationnels.

2.1 Conséquences de la suite spectrale de Leray

Dans cette section, k désigne un corps de caractéristique nulle, dont on choisit une clôture algébrique \bar{k} ; on note $\Gamma = \text{Gal}(\bar{k}/k)$ le groupe de Galois absolu de k . On considère G un k -groupe algébrique abélien. Enfin on se donne:

$$\pi : X \longrightarrow \text{Spec } k$$

un k -schéma géométriquement connexe, quasi-compact et quasi-séparé, et on suppose satisfaite la condition:

$$\bar{G}_X(\bar{X}) = \bar{G}(\bar{k})$$

Rappelons quelques définitions:

Définition 2.1.1. *Un morphisme de schémas $f : X \rightarrow Y$ est dit:*

- (i) **quasi-compact** si pour tout ouvert quasi-compact U de Y , l'image réciproque $f^{-1}(U)$ est quasi-compacte;
- (ii) **quasi-séparé** (resp. **séparé**) si le morphisme diagonal

$$\Delta_f : X \times_Y X \longrightarrow Y$$

est quasi-compact (resp. une immersion fermée).

Un k -schéma est dit **quasi-compact** (resp. **quasi-séparé**, resp. **séparé**) si le morphisme structural $X \rightarrow \text{Spec } k$ est quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. séparé).

Exemple 2.1.2. Un morphisme séparé est quasi-séparé, puisqu'une immersion fermée est quasi-compacte; un morphisme noethérien est quasi-compact (*cf.* [EGA1] I.6.1.9); un morphisme affine est quasi-compact et séparé (*cf.* [EGA1] I.9.1.3); le caractère quasi-compact (*resp.* quasi-séparé) est stable par composition et par changement de base quelconque (*cf.* [EGA1] I.6.1.5, *resp.* I.6.1.9);...

Avec ces hypothèses sur X et G , on a une suite exacte à 5 termes:

$$(S1) : \quad 0 \longrightarrow H^1(k, \pi_* G_X) \longrightarrow H^1(X, G_X) \xrightarrow{u} H^0(k, R^1 \pi_* G_X) \\ \xrightarrow{\delta^1} H^2(k, \pi_* G_X) \xrightarrow{v} H^2(X, G_X)$$

qui est la suite exacte en basses dimensions associée à la suite spectrale de Leray:

$$E_2^{p,q} = R^p \underline{\Gamma}_k(R^q \pi_* G_X) \implies R^{p+q} \underline{\Gamma}_X(G_X) = E^{p+q}$$

où:

$$\underline{\Gamma}_k : FAGRAB(k) \longrightarrow \mathfrak{Ab} \quad (\text{resp. } \underline{\Gamma}_X : FAGRAB(X) \longrightarrow \mathfrak{Ab})$$

est le foncteur qui associe à un faisceau de groupes abéliens sur le site étale de k (*resp.* de X) le groupe abélien de ses sections globales. Comme par définition les foncteurs dérivés à droite de ces foncteurs sont justement les foncteurs cohomologie, on peut réécrire la suite spectrale ci-dessus:

$$E_2^{p,q} = H^p(k, R^q \pi_* G_X) \implies H^{p+q}(X, G_X) = E^{p+q}$$

On peut maintenant rendre plus agréable l'expression de la suite (S1) grâce au théorème 5.2 de [SGA4-VIII] dont voici l'énoncé:

Théorème 2.1.3. Soient $f : Z \rightarrow Y$ un morphisme quasi-compact et quasi-séparé de schémas, G un faisceau abélien sur Z , y un point de Y , \bar{y} le point géométrique au-dessus de y , relatif à une clôture séparable $k(\bar{y})$ de $k(y)$, $\bar{Y} = \text{Spec}(\mathcal{O}_{Y,\bar{y}})$ le schéma localisé strict correspondant, $\bar{Z} = Z \times_Y \bar{Y}$, \bar{G} l'image inverse de G sur \bar{Z} . Alors l'homomorphisme canonique:

$$(R^q f_* G)_{\bar{y}} \longrightarrow H^q(\bar{Z}, \bar{G})$$

est un isomorphisme, pour tout $q \geq 0$.

Remarque 2.1.4. Cet énoncé reste valable (d'après la remarque 5.3 de [SGA4-VIII]) pour un faisceau de groupes G sur Z non-nécessairement abélien, pour $q = 0$ et $q = 1$, en prenant pour $R^1 f_* G$ la définition de [Gi71] V.2.1: c'est le faisceau sur Y associé au préfaisceau dont l'ensemble des sections $R^1 f_* G(Y')$ au-dessus d'un ouvert étale ($Y' \rightarrow Y$) est donné par:

$$R^1 f_* G(Y') = H^1(Z \times_Y Y', G|_{Z \times_Y Y'})$$

Corollaire 2.1.5. Sous les hypothèses du début de cette section, on a des isomorphismes:

$$(\pi_* G_X)_{\text{Spec } \bar{k}} \approx \bar{G}(\bar{k})$$

$$(R^1 \pi_* G_X)_{\text{Spec } \bar{k}} \approx H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)$$

PREUVE: il suffit d'appliquer le théorème ci-dessus avec $Z = X$, $Y = \text{Spec } k$, $f = \pi$ et $G = G_X$, et d'utiliser (pour obtenir le premier isomorphisme) l'hypothèse $\bar{G}_X(\bar{X}) = \bar{G}(\bar{k})$.

□

Par conséquent, on peut réécrire la suite (S1):

$$(S2): 0 \longrightarrow H^1(k, G) \longrightarrow H^1(X, G_X) \xrightarrow{u} H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)^\Gamma \xrightarrow{\delta^1} H^2(k, G) \longrightarrow H^2(X, G_X)$$

Remarque 2.1.6. De fait, l'image du morphisme v est incluse dans la partie transgressive $H^2(X, G_X)^{\text{alg}}$, qui est le noyau du morphisme évident:

$$H^2(X, G_X) \longrightarrow H^2(\bar{X}, \bar{G}_X)$$

Ces considérations nous amènent à introduire une nouvelle notation:

Définition 2.1.7. Soit k un corps. On appelle *k-schéma de type (*)* un *k-schéma géométriquement connexe, quasi-compact et quasi-séparé*.

Une première conséquence de l'exactitude de la suite (S2) est la suivante:

Théorème 2.1.8 (Obstruction abélienne à l'existence d'un point rationnel). Soient k un corps de caractéristique nulle, X un *k-schéma de type (*)*, et G un *k-groupe algébrique abélien* tels que $\bar{G}_X(\bar{X}) = \bar{G}(\bar{k})$.

Si $X(k) \neq \emptyset$, alors tout \bar{G}_X -torseur sur \bar{X} de corps des modules k est défini sur k .

PREUVE: l'existence d'un point *k*-rationnel sur X entraîne l'existence d'une rétraction du morphisme $v : H^2(k, G) \rightarrow H^2(X, G_X)$. Donc v est injectif¹, donc le cobord δ^1 de la suite (S2) est nul, donc le morphisme u est surjectif, d'où la conclusion.

□

Remarque 2.1.9. Il revient au même de dire, avec les notations et hypothèses du théorème, l'existence d'un point *k*-rationnel sur X entraîne l'existence d'un point *k*-rationnel de la gerbe des modèles de tout \bar{G}_X -torseur sur \bar{X} de corps des modules k .

Une dernière manière de traduire l'énoncé précédent est que lorsque X possède un point rationnel, il n'existe pas d'obstruction à la descente des \bar{G}_X -torseurs de corps des modules k .

En outre, on peut prolonger la suite exacte (S2): en effet, on peut associer à toute suite spectrale:

$$E_2^{p,q} \Longrightarrow E^{p+q}$$

¹Puisque dans la catégorie des groupes abéliens, il est équivalent de dire qu'un morphisme est injectif ou qu'il possède une rétraction.

une suite exacte:

$$0 \longrightarrow E_2^{1,0} \longrightarrow E^1 \longrightarrow E_2^{0,1} \longrightarrow E_2^{2,0} \longrightarrow E^{2,tr} \longrightarrow E_2^{1,1} \longrightarrow E_2^{3,0}$$

où:

$$E^{2,tr} = \ker \{ E^2 \longrightarrow E_2^{0,2} \}$$

Sous les hypothèses du théorème 2.1.8, on obtient ainsi la suite exacte:

$$(S3) : 0 \longrightarrow H^1(k, G) \longrightarrow H^1(X, G_X) \xrightarrow{u} H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)^\Gamma \xrightarrow{\delta^1} H^2(k, G) \\ \xrightarrow{v} H^2(X, G_X)^{alg} \xrightarrow{w} H^1(k, H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)) \xrightarrow{\delta^2} H^3(k, G)$$

On en déduit donc la:

Proposition 2.1.10. *Soient k un corps de caractéristique nulle, X un k -schéma de type $(*)$, et G un k -groupe algébrique tels que $\bar{G}_X(\bar{X}) = \bar{G}(\bar{k})$.*

Si $X(k) \neq \emptyset$ alors:

(i) la suite:

$$0 \longrightarrow H^1(k, G) \longrightarrow H^1(X, G_X) \xrightarrow{u} H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)^\Gamma \longrightarrow 0$$

est exacte;

(ii) la suite:

$$0 \longrightarrow H^2(k, G) \xrightarrow{v} H^2(X, G_X)^{alg} \xrightarrow{w} H^1(k, H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)) \longrightarrow 0$$

est exacte. En particulier:

$$H^1(k, H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)) \approx \frac{H^2(X, G_X)^{alg}}{H^2(k, G)}$$

(iii) le morphisme $z : H^3(k, G) \longrightarrow H^3(X, G_X)$ est injectif.

PREUVE: l'existence d'un point k -rationnel sur X entraîne l'existence de rétractions des morphismes v et z , d'où la conclusion, en utilisant l'exactitude de la suite $(S3)$.

□

Nous donnons maintenant des exemples d'applications de ces propriétés aux groupes de Picard et de Brauer d'une k -variété, ainsi qu'aux G -revêtements abéliens.

- Application aux groupes de Picard et de Brauer

On s'intéresse donc ici au cas particulier où $G = \mathbb{G}_{m,k}$. De manière à pouvoir utiliser les résultats précédents, on souhaite voir remplie la condition:

$$\mathbb{G}_{m,\bar{X}}(\bar{X}) = \mathbb{G}_{m,\bar{k}}(\bar{k})$$

c'est-à-dire:

$$\bar{k}[X]^* = \bar{k}^*$$

Pour ces applications, nous considérons donc une k -variété X **propre**². En écrivant alors la suite $(S3)$ avec $G = \mathbb{G}_{m,k}$, on obtient la suite exacte:

²Mais les résultats obtenus ici sont encore valables pour une variété X telle que: $\bar{k}[X]^* = \bar{k}^*$; une telle variété n'est pas nécessairement propre (on peut par exemple penser à l'espace affine \mathbb{A}_k^n).

$$(S4) : \quad 0 \longrightarrow \text{Pic } X \longrightarrow (\text{Pic } \bar{X})^{\Gamma} \longrightarrow \text{Br } k \longrightarrow \text{Br}^{alg} X$$

$$\longrightarrow H^1(k, \text{Pic } \bar{X}) \longrightarrow H^3(k, \mathbb{G}_{m,k})$$

où: $\text{Br}^{alg} X = \ker \{ \text{Br } X \rightarrow \text{Br } \bar{X} \}$ est le groupe de Brauer *transgressif* de X . De cette suite exacte, on déduit immédiatement la:

Proposition 2.1.11. *Si X est une k -variété propre, et si $X(k) \neq \emptyset$, alors:*

(i) *tout fibré en droites sur \bar{X} de corps des modules k est défini sur k ;*

(ii) *la suite:*

$$0 \longrightarrow \text{Br } k \longrightarrow \text{Br}^{alg} X \longrightarrow H^1(k, \text{Pic } \bar{X}) \longrightarrow 0$$

est exacte;

(iii) *le morphisme $H^3(k, \mathbb{G}_{m,k}) \longrightarrow H^3(X, \mathbb{G}_{m,X})$ est injectif.*

PREUVE: c'est une conséquence immédiate de la proposition 2.1.10.

□

Notons tout de suite que le (i) de la proposition ci-dessus ne peut pas fournir réellement d'obstruction à l'existence d'un point k -rationnel lorsque k est un corps de nombres. Plus explicitement:

Proposition 2.1.12. *Soient k un corps de nombres, \mathbb{A}_k son anneau des adèles, et soit X une k -variété propre. Si $X(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset$, alors le morphisme:*

$$\text{Pic } X \longrightarrow (\text{Pic } \bar{X})^{\Gamma}$$

est un isomorphisme.

PREUVE: soit \bar{L} un fibré en droites sur \bar{X} de corps des modules k . La gerbe des modèles $D(\bar{L})$ vit dans $\text{Br } k$. Mais, comme X a un k_v -point pour toute place v de k :

$$D(\bar{L}) \otimes_k k_v = \text{loc}_v(D(\bar{L}))$$

est neutre, pour toute place v de k ($\text{loc}_v : \text{Br } k \rightarrow \text{Br } k_v$ étant le morphisme évident). En particulier, $D(\bar{L})$ est dans le noyau de l'application loc intervenant dans la célèbre suite exacte:

$$0 \longrightarrow \text{Br } k \xrightarrow{\text{loc}} \bigoplus_{v \in \Omega_k} \text{Br } k_v \xrightarrow{\sum \text{inv}_v} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Donc $D(\bar{L}) = 0$, donc \bar{L} est défini sur k .

□

L'exactitude de la suite (S4) a aussi des conséquences sur le calcul de l'obstruction de Brauer-Manin³ d'une variété. Explicitement, supposons toujours X propre: l'obstruction de Brauer-Manin de X associée à $\mathbf{B}(X)$ (en reprenant la terminologie de [CTS87], définition 3.1.1), que nous noterons $m_{H,\mathbf{B}(X)}(X)$, est un élément de

$$\mathbf{B}(X)^D = \text{Hom}(\mathbf{B}(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

où $\mathbf{B}(X)$ est le groupe construit à partir du groupe de Brauer de la façon suivante: on commence par poser:

$$\text{Br}_a X = \frac{\text{Br}^{alg} X}{\text{im}(\text{Br } k \rightarrow \text{Br } X)}$$

puis on définit $\mathbf{B}(X)$ (*resp.* $\text{III}^1(k, \text{Pic } \bar{X})$) comme le noyau de l'application de localisation:

$$\text{Br}_a X \rightarrow \prod_{v \in \Omega_k} \text{Br}_a(X \otimes_k k_v) \quad \left(\text{resp. } H^1(k, \text{Pic } \bar{X}) \rightarrow \prod_{v \in \Omega_k} H^1(k_v, \text{Pic } \bar{X}) \right)$$

En utilisant l'exactitude de la suite (S4) on obtient:

$$\text{Br}_a X \approx H^1(k, \text{Pic } \bar{X})$$

donc en “passant aux noyaux sur toutes les places”, on a:

$$\mathbf{B}(X) \approx \text{III}^1(k, \text{Pic } \bar{X})$$

Le calcul de l'obstruction de Brauer-Manin de X associée à $\mathbf{B}(X)$ se ramène donc essentiellement au calcul de $\text{Pic } \bar{X}$. D'où par exemple la:

Proposition 2.1.13. *Soient k un corps de nombres et X une k -variété qui est:*

- (i) *une variété de Severi-Brauer;*
- (ii) *une intersection complète lisse de dimension ≥ 3 ;*

alors:

$$\mathbf{B}(X) = 0$$

En particulier, l'obstruction de Brauer-Manin $m_{H,\mathbf{B}(X)}(X)$ d'une telle variété est nulle.

PRÉUVE: elle repose sur le fait que dans les deux cas, on a $\text{Pic } \bar{X} = \mathbb{Z}$.⁴ Donc $H^1(k, \text{Pic } \bar{X}) = 0$, et *a fortiori* $\text{III}^1(k, \text{Pic } \bar{X}) = 0$. D'où la conclusion, puisque $m_{H,\mathbf{B}(X)}(X) \in \mathbf{B}(X)^D$ et $\mathbf{B}(X) \approx \text{III}^1(k, \text{Pic } \bar{X})$.

□

³Pour la définition et la construction de cette obstruction, nous renvoyons à la section 2.3.1 du présent chapitre.

⁴C'est trivial pour les variétés de Severi-Brauer, et nous renvoyons à la démonstration de la proposition suivante pour le cas des intersections complètes.

Cet énoncé n'est toutefois absolument pas surprenant dans la mesure où le groupe de Brauer de telles variétés est "trivial" dans le sens suivant:

Proposition 2.1.14. *La "conjecture de Grothendieck" est "trivialement vraie" pour les variétés de Severi-Brauer et pour les variétés intersections complètes lisses dans \mathbb{P}^n de dimension ≥ 3 sur un corps k de caractéristique nulle. Plus précisément, si X est une telle variété, alors:*

$$\mathrm{Br}_{A\bar{z}}X \approx \mathrm{Br} k \approx \mathrm{Br} X$$

$\mathrm{Br}_{A\bar{z}}X$ désignant le groupe des classes d'isomorphie d'algèbres d'Azumaya sur X .

PREUVE: si X est une variété de Severi-Brauer: alors il existe un entier n tel que: $\bar{X} \approx \mathbb{P}_k^n$. Par suite, $\mathrm{Pic} \bar{X} = \mathbb{Z}$, donc $H^1(k, \mathrm{Pic} \bar{X}) = 0$, donc $\mathrm{Br} k = \mathrm{Br}^{alg}X$. De plus, $\mathrm{Br} \bar{X} = 0$, car le groupe de Brauer d'un espace projectif sur un corps algébriquement clos est nul [Gr68]. Donc $\mathrm{Br}^{alg}X = \mathrm{Br} X$.

Si X est une intersection complète lisse dans \mathbb{P}^n de dimension ≥ 3 : commençons par montrer: $\mathrm{Pic} \bar{X} = \mathbb{Z}$. D'après le principe de Lefschetz (*cf.* [Har92] 15.1), k étant de caractéristique nulle, on peut supposer $\bar{k} = \mathbb{C}$. Supposons dans un premier temps que X est une hypersurface: on a le diagramme commutatif et à lignes exactes suivant:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H^1(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}) & \longrightarrow & H^1(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}^*) & \longrightarrow & H^2(\bar{X}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}) \longrightarrow \cdots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \cdots & \longrightarrow & H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^*) & \longrightarrow & H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

les lignes étant obtenues à partir de la suite exponentielle, et les colonnes à partir de l'inclusion: $\bar{X} \hookrightarrow \mathbb{P}^n$. Pour des raisons évidentes de dimension⁵, les groupes:

$$H^1(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}), H^2(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}), H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \text{ et } H^2(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$$

sont nuls. D'autre part, le théorème de la section hyperplane de Lefschetz (*cf.* [GH78] p.156) assure que le morphisme:

$$H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(\bar{X}, \mathbb{Z})$$

est un isomorphisme. Donc:

$$H^1(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}^*) \approx H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^*)$$

c'est-à-dire:

$$\mathrm{Pic} \bar{X} \approx \mathbb{Z}$$

Pour obtenir cette propriété dans le cas où \bar{X} est une intersection complète lisse dans \mathbb{P}^n (et non plus seulement une hypersurface), il suffit d'appliquer le théorème de la section hyperplane "suffisamment" de fois (précisément $n - \dim \bar{X}$ fois). D'après la suite (S4), on a déjà:

$$\mathrm{Br}^{alg}X = \mathrm{Br} k$$

⁵Pour $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$, $i = 1, 2$, c'est exactement le (b) du théorème III.5.1 de [Hart77]; pour $H^i(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}})$, $i = 1, 2$, c'est le (c) de l'exercice III.5.5 de *loc. cit.*

La conclusion provient alors du fait que le morphisme naturel

$$\mathrm{Br}_{Az}X \longrightarrow \mathrm{Br} X$$

est toujours injectif, et de ce que $\mathrm{Br} \bar{X} = 0$ dans ce cas [Ma74].

□

- Application aux G -revêtements (G abélien)

On considère X une k -variété projective géométriquement irréductible et G un groupe fini abélien. Dans ce cas, G -revêtements étales et G -torseurs coïncident, et l'obstruction à ce qu'un G -revêtement $\bar{f} : \bar{Y} \rightarrow \bar{X}$ de corps des modules k soit défini sur k est mesuré par une gerbe $\mathcal{G}(\bar{f})$ vivant dans $H^2(k, G)$. Une conséquence presque immédiate de la suite spectrale de Leray est l'énoncé suivant (qui est à rapprocher du théorème de Combes-Harbater):

Théorème 2.1.15. *Avec les notations introduites plus haut, si X possède un point k -rationnel en dehors du lieu de ramification de \bar{f} , alors le G -revêtement \bar{f} est défini sur k .*

PREUVE: On note $X^* = X - R$, où R est le lieu de ramification de \bar{f} , $\bar{X}^* = \bar{X} - \bar{R}$, et $\bar{f}^* : \bar{Y}^* \rightarrow \bar{X}^*$ la restriction de \bar{f} à \bar{X}^* . La condition $\bar{G}(\bar{X}) = \bar{G}(\bar{k})$ est satisfaite, car G est fini, et la conclusion provient alors de ce que l'existence d'un point k -rationnel sur X^* entraîne l'existence d'une rétraction du morphisme v dans la suite exacte:

$$0 \longrightarrow H^1(k, G) \longrightarrow H^1(X^*, G) \xrightarrow{u} H^1(\bar{X}^*, G)^\Gamma \xrightarrow{\delta^1} H^2(k, G) \xrightarrow{v} H^2(X^*, G)$$

□

Si l'on suppose maintenant $k = \mathbb{Q}$, et:

$$X(A_{\mathbb{Q}}) \neq \emptyset$$

c'est-à-dire si l'on suppose que X a des points réels et des points p -adiques pour tout nombre premier p , alors:

$$\mathcal{G}(\bar{f}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = 0$$

et:

$$\mathcal{G}(\bar{f}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p = 0, \forall p \text{ premier}$$

c'est-à-dire:

$$\mathcal{G}(\bar{f}) \in \mathrm{III}^2(\mathbb{Q}, G) = 0$$

On retrouve ainsi le principe local-global de Dèbes et Douai (cf. [DD97] theorem 3.8):

Théorème 2.1.16 (Principe local-global pour les G -revêtements abéliens). *Avec les notations indiquées ci-dessus, un G -revêtement $\bar{f} : \bar{Y} \rightarrow \bar{X}$ de corps des modules Q est défini sur \mathbb{Q} si et seulement si il est défini sur \mathbb{R} et sur \mathbb{Q}_p pour tout premier p . C'est en particulier le cas si X possède des points adéliques.*

2.2 De l'importance de la condition $\bar{G}_X(\bar{X}) = \bar{G}(\bar{k})$

Nous commençons par un exemple (dû à J.-L. Colliot-Thélène et O. Gabber) illustrant le caractère indispensable de cette condition. Soit k un corps possédant une extension cyclique non-triviale L . Il existe donc une classe α non-nulle dans $H^2(k, \mathbb{Z})$. On considère le k -schéma:

$$X = \mathbb{G}_m = \text{Spec } k[T, T^{-1}]$$

On fixe \bar{k} une clôture séparable de k , et on note comme d'habitude $\bar{X} = X \otimes_k \bar{k}$. Les fonctions inversibles sur \bar{X} sont données par:

$$\bar{k}[X]^* \approx \bar{k}^* \oplus \mathbb{Z}$$

le scindage étant obtenu par évaluation en $T = 1$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \bar{k}[X]^* & \xrightarrow{\text{ev}_1} & \bar{k}^* \longrightarrow 0 \\ & & n \longmapsto & & T^n & & \\ & & & & \mu T^n & \longmapsto & \mu \end{array}$$

On en déduit la suite exacte:

$$H^2(k, \mathbb{Z}) \xrightarrow{i} H^2(k, \bar{k}[X]^*) \longrightarrow \text{Br } k$$

Remarquons que le morphisme i est injectif, car $H^1(k, \bar{k}^*) = 0$. Notons:

$$\beta = i(\alpha).$$

β est donc un élément non-nul de $H^2(k, \bar{k}[X]^*)$. D'autre part, on a un morphisme⁶:

$$j : H^2(k, \bar{k}[X]^*) \longrightarrow \text{Br } X$$

Comme X est affine, le monomorphisme de groupes:

$$\Delta : \text{Br}_{A\bar{z}} X \longrightarrow \text{Br } X$$

obtenu en associant à une algèbre d'Azumaya sur X la gerbe de ses banalisations (*cf.* [Gi71] V.4.2) est un isomorphisme (*cf.* [Ga80] thm. 1 p.163). Par suite il existe une un schéma de Severi-Brauer $Y \rightarrow X$ telle que:

$$\Delta(Y) = j(\beta)$$

Comme l'évaluation de β en 1 est triviale, Y possède un point k -rationnel au-dessus de $T = 1$. En particulier:

$$Y(k) \neq \emptyset$$

⁶C'est l'edge $E_2^{2,0} \longrightarrow E^2$ de la suite spectrale de Leray:

$$H^p(k, R^q \pi_* \mathbb{G}_{m,X}) \Longrightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{G}_{m,X}).$$

De la suite spectrale de Leray et du morphisme $Y \rightarrow X$ on déduit le diagramme commutatif et à lignes exactes suivant:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Pic} Y & \longrightarrow & (\mathrm{Pic} \bar{Y})^\Gamma & \xrightarrow{\delta_Y} & H^2(k, \bar{k}[Y]^*) & \xrightarrow{u_Y} & \mathrm{Br} Y \\ \uparrow & & \uparrow & & w \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{Pic} X & \longrightarrow & (\mathrm{Pic} \bar{X})^\Gamma & \xrightarrow{\delta_X} & H^2(k, \bar{k}[X]^*) & \xrightarrow{u_X} & \mathrm{Br} X \end{array}$$

On a $\bar{k}[X]^* = \bar{k}[Y]^*$,⁷ et w est un isomorphisme. β (identifié à son image par w dans $H^2(k, \bar{k}[Y]^*)$) est non-nul, mais $u_Y(\beta) = 0$. Donc le morphisme u_Y n'est pas injectif, malgré l'existence d'un point k -rationnel. En particulier, le morphisme $\mathrm{Pic} Y \rightarrow (\mathrm{Pic} \bar{Y})^\Gamma$ n'est pas surjectif.

Proposition 2.2.1. *Pour le k -schéma Y construit ci-dessus, le morphisme*

$$\mathrm{Pic} Y \rightarrow (\mathrm{Pic} \bar{Y})^\Gamma$$

n'est pas surjectif, bien que Y possède un point k -rationnel.

Nous montrons maintenant pourquoi, sur cet exemple, l'existence d'un point k -rationnel sur Y n'entraîne pas l'existence d'une rétraction du morphisme v dans la suite exacte (c'est la suite $(S1)$ déduite de la suite spectrale de Leray):

$$(S5) : \mathrm{Pic} Y \xrightarrow{u} H^0(k, R^1\pi_* \mathbb{G}_{m,Y}) \xrightarrow{\delta^1} H^2(k, \pi_* \mathbb{G}_{m,Y}) \xrightarrow{v} \mathrm{Br} Y$$

où π désigne le morphisme structural $Y \rightarrow \mathrm{Spec} k$, obtenu par composition à partir des morphismes $Y \rightarrow X$ et $X \rightarrow \mathrm{Spec} k$.

Commençons par décrire δ^1 : soit \mathcal{P} un élément de $H^0(k, R^1\pi_* \mathbb{G}_{m,Y})$; c'est une section globale du faisceau $R^1\pi_* \mathbb{G}_{m,Y}$, et c'est donc la donnée:

- d'une famille d'extensions étales $(L_i/k)_{i \in I}$;
- pour tout $i \in I$, d'un $\mathbb{G}_{m,Y_{L_i}}$ -torseur $P_i \rightarrow Y_{L_i}$;
- pour tout couple $(i, j) \in I \times I$, d'un isomorphisme:

$$\varphi_{ij} : P_j|_{Y_{L_{ij}}} \longrightarrow P_i|_{Y_{L_{ij}}}$$

⁷Car le morphisme $Y \rightarrow X$ est lisse avec des fibres propres et géométriquement intègres. Donc une fonction inversible sur Y a une restriction à la fibre générique qui est constante (je remercie D. Harari pour cet argument).

On peut maintenant donner une description tout-à-fait concrète de ce qui empêche \mathcal{P} d'appartenir à l'image du morphisme u . Pour tout triplet $(i, j, k) \in I^3$, on a le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} P_k \times_{Y_{L_k}} Y_{L_{ijk}} & \xrightarrow{\varphi_{ik}|_{Y_{L_{ijk}}}} & P_i \times_{Y_{L_i}} Y_{L_{ijk}} \\ & \searrow \varphi_{jk}|_{Y_{L_{ijk}}} & \nearrow \varphi_{ij}|_{Y_{L_{ijk}}} \\ & P_j \times_{Y_{L_j}} Y_{L_{ijk}} & \end{array}$$

qui n'a aucune raison d'être commutatif. On pose alors:

$$c_{ijk} = \varphi_{ij}|_{Y_{L_{ijk}}} \circ \varphi_{jk}|_{Y_{L_{ijk}}} \circ (\varphi_{ik}|_{Y_{L_{ijk}}})^{-1}$$

Il est immédiat que $(c_{ijk})_{i,j,k \in I}$ est un 2-cocycle, qui mesure l'obstruction à ce que la famille des isomorphismes $(\varphi_{ij})_{i,j \in I}$, qui est une donnée de *recollement* sur les P_i soit une donnée de *descente*;

$$\begin{array}{ccc} P_k \times_{Y_{L_k}} Y_{L_{ijk}} & \xrightarrow{\varphi_{ik}|_{Y_{L_{ijk}}}} & P_i \times_{Y_{L_i}} Y_{L_{ijk}} \\ & \searrow \varphi_{jk}|_{Y_{L_{ijk}}} & \downarrow c_{ijk} \\ & P_j \times_{Y_{L_j}} Y_{L_{ijk}} & \nearrow \varphi_{ij}|_{Y_{L_{ijk}}} \end{array}$$

Remarquons maintenant que:

$$c_{ijk} \in \text{ad}_{\mathbb{G}_m, Y_{L_{ijk}}} (P_i \times_{Y_{L_i}} Y_{L_{ijk}}), \quad \forall (i, j, k) \in I^3$$

et du fait que \mathbb{G}_m est abélien (!), on a:

$$c_{ijk} \in \mathbb{G}_{m, Y_{L_{ijk}}} (Y_{L_{ijk}}) = \mathcal{O}_{Y_{L_{ijk}}}^* (Y_{L_{ijk}}), \quad \forall (i, j, k) \in I^3$$

Or, par définition du faisceau $\pi_* \mathbb{G}_{m, Y}$, ceci signifie encore que:

$$c_{ijk} \in \pi_* \mathbb{G}_{m, Y} (L_{ijk}), \quad \forall (i, j, k) \in I^3$$

Par suite, la classe du 2-cocycle:

$$[c_{ijk}] \in \check{H}^2 ((L_i/k)_{i \in I}, \pi_* \mathbb{G}_{m, Y}) \hookrightarrow \check{H}^2 (k, \pi_* \mathbb{G}_{m, Y}) \simeq H^2 (k, \pi_* \mathbb{G}_{m, Y})$$

(où le dernier isomorphisme est dû au théorème III.2.17 de [Mi80]) est exactement l'obstruction à ce que \mathcal{P} appartienne à l'image de u .

Passons maintenant à la description de v . Soit $\mathcal{G} \in H^2 (k, \pi_* \mathbb{G}_{m, Y})$. En utilisant une fois encore le théorème III.2.17 de [Mi80], \mathcal{G} est représenté par un 2-cocycle:

$$(g_{ijk})_{i,j,k \in I'} \in Z^2 ((L_i/k)_{i \in I'}, \pi_* \mathbb{G}_{m, Y})$$

Par définition, on a donc:

$$g_{ijk} \in \pi_* \mathbb{G}_{m, Y} (L_{ijk}), \quad \forall (i, j, k) \in I'^3$$

c'est-à-dire:

$$g_{ijk} \in \mathbb{G}_{m,Y}(Y_{L_{ijk}}), \forall (i,j,k) \in I'^3$$

On obtient donc trivialement un 2-cocycle:

$$(g_{ijk})_{i,j,k \in I'} \in Z^2((Y_{L_i}/Y)_{i \in I'}, \mathbb{G}_{m,Y})$$

ce qui fournit donc une interprétation particulièrement claire du morphisme:

$$v : H^2(k, \pi_* \mathbb{G}_{m,Y}) \longrightarrow H^2(Y, \mathbb{G}_{m,Y})$$

Montrons maintenant que l'existence d'un point k -rationnel entraîne l'existence d'un morphisme:

$$r : H^2(Y, \mathbb{G}_{m,Y}) \longrightarrow \text{Br } k$$

Soit $\mathfrak{G} \in H^2(Y, \mathbb{G}_{m,Y})$; une nouvelle application du théorème III.2.17 de [Mi80] permet de supposer que \mathfrak{G} est représenté par un 2-cocycle⁸:

$$(\gamma_{\alpha\beta\epsilon})_{\alpha,\beta,\epsilon \in A} \in Z^2((Y_\alpha/Y)_{\alpha \in A}, \mathbb{G}_{m,Y})$$

Pour tout $(\alpha, \beta, \epsilon) \in A^3$, on a⁹:

$$\gamma_{\alpha\beta\epsilon} \in G_Y(Y_{\alpha\beta\epsilon})$$

Puisque Y possède un point k -rationnel y , on peut considérer le produit fibré:

$$Y_\alpha \times_{Y,y} \text{Spec } k$$

C'est un k -schéma étale, étant obtenu par changement de base à partir du morphisme $Y_\alpha \rightarrow Y$, qui est étale par hypothèse. On note $\text{Spec } K_\alpha$ ce schéma. Pour résumer la situation, on a donc le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbb{G}_{m,Y} & & \\
 & & \downarrow h & & \\
 Y_\alpha & \xrightarrow{f_\alpha} & Y & \xleftarrow{\quad \pi \quad} & \mathbb{G}_{m,k} \\
 \uparrow y_\alpha & & \downarrow y & & \downarrow \\
 \text{Spec } K_\alpha & \xrightarrow{q_\alpha} & \text{Spec } k & &
 \end{array}$$

Revenons maintenant à notre cocycle $(\gamma_{\alpha\beta\epsilon})_{\alpha,\beta,\epsilon}$. Pour tout triplet $(\alpha, \beta, \epsilon) \in A^3$, le

⁸Où $(Y_\alpha/Y)_{\alpha \in A}$ est un recouvrement étale de Y qui ne provient pas *a priori* d'un recouvrement étale de k .

⁹On a noté: $Y_{\alpha\beta\epsilon} = Y_\alpha \times_Y Y_\beta \times_Y Y_\epsilon$.

nouveau diagramme ci-dessous est commutatif:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & c_{\alpha\beta\epsilon} & & \mathbb{G}_{m,Y} \\
 & & \nearrow & & \downarrow \\
 Y_{\alpha\beta\epsilon} & \xrightarrow{f_{\alpha\beta\epsilon}} & Y & \xleftarrow{\pi} & \mathbb{G}_{m,k} \\
 \uparrow y_{\alpha\beta\epsilon} & & & \downarrow y & \downarrow h \\
 \text{Spec } K_{\alpha\beta\epsilon} & \xrightarrow{q_{\alpha\beta\epsilon}} & \text{Spec } k & & \mathbb{G}_{m,k}
 \end{array}$$

où:

$$K_{\alpha\beta\epsilon} = K_\alpha \otimes_k K_\beta \otimes_k K_\epsilon$$

On pose:

$$\widehat{c_{\alpha\beta\epsilon}}^y = h \circ c_{\alpha\beta\epsilon} \circ y_{\alpha\beta\epsilon}, \quad \forall (\alpha, \beta, \epsilon) \in A^3$$

Alors:

$$\widehat{c_{\alpha\beta\epsilon}}^y \in \mathbb{G}_{m,k}(K_\alpha), \quad \forall (\alpha, \beta, \epsilon) \in A^3$$

Ce faisant, on obtient donc un 2-cocycle:

$$(\widehat{c_{\alpha\beta\epsilon}}^y) \in Z^2 \left((K_\alpha/k)_{\alpha \in A}, \mathbb{G}_{m,k} \right)$$

Il est immédiat que l'on a ainsi défini un morphisme:

$$r : H^2(Y, \mathbb{G}_{m,Y}) \longrightarrow \text{Br } k$$

mais du fait que $\pi_* \mathbb{G}_{m,Y} \neq \mathbb{G}_{m,k}$, ce n'est pas une rétraction du morphisme:

$$u : H^2(k, \pi_* \mathbb{G}_{m,Y}) \longrightarrow H^2(Y, \mathbb{G}_{m,Y})$$

mais seulement une rétraction du morphisme:

$$u' : \mathrm{Br} \ k \longrightarrow H^2(Y, \mathbb{G}_{m,Y})$$

défini de manière évidente vu ce qui précède. Pour conclure, on a le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Pic} \, Y & \xrightarrow{u} & H^0(k, R^1\pi_*\mathbb{G}_{m,Y}) & \xrightarrow{\delta^1} & H^2(k, \pi_*\mathbb{G}_{m,Y}) & \xrightarrow{v} & \mathrm{Br} \, Y \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \mathrm{Br} \, k & \xrightarrow{i} & \mathrm{Br} \, k & \xrightarrow{u'} & \mathrm{Br} \, Y \\ & & & & & \nearrow r & \\ & & & & & & \end{array}$$

Remarque 2.2.2. Nous avons affirmé un peu vite que r est une rétraction du morphisme u' . Pour compléter la preuve de cette affirmation, il reste encore à prouver le fait suivant: si L/k est une extension étale, et en reprenant les notations habituelles:

$$\begin{array}{ccc} Y_L & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi_L \downarrow & & \downarrow \pi \\ \text{Spec } L & \xrightarrow{g} & \text{Spec } k \end{array}$$

alors:

$$\mathrm{Spec} L \simeq Y_L \times_{f,Y,y} \mathrm{Spec} k$$

Pour ce faire, on commence par remarquer que l'existence du point k -rationnel y entraîne l'existence d'une section:

$$y_L : \mathrm{Spec} L \rightarrow Y_L$$

du morphisme π_L . Son existence (et son unicité d'ailleurs) est assurée par la propriété universelle du produit fibré, puisque l'on dispose du diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Spec} L & & & & \\ \text{---} & \searrow y \circ q & & & \\ & \text{---} & Y_L & \xrightarrow{f} & Y \\ id & \swarrow y_L & \downarrow \pi_L & & \downarrow \pi \\ & & \mathrm{Spec} L & \xrightarrow{q} & \mathrm{Spec} k \\ & & & \text{---} & \end{array}$$

Donnons nous maintenant un schéma Z et deux morphismes

$$g : Z \longrightarrow X_L \quad \text{et} \quad h : Z \longrightarrow \mathrm{Spec} k$$

tels que: $f \circ g = y \circ h$. On a:

$$\begin{array}{ccccc} Z & & & & \\ \text{---} & \searrow h & & & \\ & \text{---} & \mathrm{Spec} L & \xrightarrow{q} & \mathrm{Spec} k \\ g & \swarrow y_L & \downarrow \pi_L & & \downarrow \pi \\ & & Y_L & \xrightarrow{f} & Y \\ & & & \text{---} & \end{array}$$

Il existe un unique morphisme

$$Y \longrightarrow \mathrm{Spec} L$$

rendant commutatif tout le diagramme ci-dessus, le morphisme $\pi_L \circ g$. En effet, on a d'un côté:

$$f \circ y_L \circ \pi_L \circ g = f \circ g$$

et de l'autre:

$$y \circ q \circ \pi_L \circ g = f \circ y_L \circ \pi_L \circ g = f \circ g$$

Enfin:

$$q \circ \pi_L \circ g = \pi \circ f \circ g = \pi \circ y \circ h = h$$

Par suite, le k -schéma $\mathrm{Spec} L$ est effectivement le produit fibré:

$$\mathrm{Spec} L \simeq Y_L \times_{f,Y,y} \mathrm{Spec} k$$

2.3 Points adéliques et torseurs

Le but de cette section est d'illustrer par des applications un résultat de Colliot-Thélène et Sansuc [CTS87] (étendu par Skorobogatov [Sk99] des tores aux groupes multiplicatifs) assurant que l'existence de points adéliques est suffisante pour descendre des torseurs sous des groupes abéliens sur des variétés propres. Jusqu'à la fin de ce chapitre:

- k est un corps de nombres, dont on note Ω_k l'ensemble des places et \mathbb{A}_k l'anneau des adèles;
- X est une k -variété propre, de telle sorte que¹⁰:

$$X(\mathbb{A}_k) = \prod_{v \in \Omega_k} X(k_v)$$

On note toujours $\pi : X \rightarrow \text{Spec } k$ le morphisme structural.

On identifie l'ensemble des points k -rationnels de X à son image dans $\prod_{v \in \Omega_k} X(k_v)$ par le morphisme diagonal:

$$\begin{aligned} X(k) &\longrightarrow \prod_{v \in \Omega_k} X(k_v) \\ x &\longmapsto (x_v = x \circ p_v)_v \end{aligned}$$

où:

$$p_v : \text{Spec } k_v \longrightarrow \text{Spec } k$$

est le morphisme évident.

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow x_v = x \circ p_v & \downarrow \pi \\ \text{Spec } k_v & \xrightarrow{p_v} & \text{Spec } k \end{array}$$

On a donc évidemment l'inclusion:

$$X(k) \subset X(\mathbb{A}_k)$$

Il est donc immédiat que $X(k) \neq \emptyset \implies X(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset$. Un problème difficile est d'arriver à déterminer pour quelles variétés la réciproque est vraie, *i.e.* l'existence de points adéliques sur X entraîne l'existence de points rationnels sur X ; c'est ce que l'on appelle le principe de Hasse. Plus précisément:

Définition 2.3.1. Soit X une variété propre sur un corps de nombres k .

(i) Si $X(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset$, on dit que X a des points **partout localement**.

¹⁰En général, on a seulement l'inclusion: $X(\mathbb{A}_k) \subset \prod_{v \in \Omega_k} X(k_v)$. Le critère valuatif de propriété (cf. [Hart77] II.4.7) fournit l'autre inclusion.

(ii) On dit que la variété X est un **contre-exemple au principe de Hasse** si X a des points partout localement, mais ne possède pas de point k -rationnel.

- Exemples de variétés satisfaisant le principe de Hasse

- les quadriques projectives lisses [Se70];
- les k -formes de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ [CTS87];
- les variétés de Severi-Brauer [CTS87];
- les surfaces de Del Pezzo de degré 6 [CTS87];
- certaines intersections de quadriques [CTCS80];
- les surfaces cubiques singulières dans \mathbb{P}_k^3 (Skolem);
- les torseurs sous un groupe semi-simple simplement connexe (Kneser-Harder, cf. théorème 4.2 de [Sa81]).

- Quelques contre-exemples au principe de Hasse

- la surface cubique de Cassels et Guy [CG66]: c'est la surface de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^3$ d'équation:

$$5X^3 + 9Y^3 + 10Z^3 + 12T^3 = 0$$

Swinnerton-Dyer [Sw62] a également exhibé une surface projective lisse contre-exemple au principe de Hasse;

- Poonen [Po99] a prouvé que pour tout $t \in \mathbb{Q}$, la courbe de \mathbb{P}^2 d'équation:

$$5X^3 + 9Y^3 + 10Z^3 + 12 \left(\frac{t^{12} - t^4 - 1}{t^{12} - t^8 - 1} \right)^3 (X + Y + Z)^3 = 0$$

est un contre-exemple au principe de Hasse;

- Siksek et Skorobogatov [SSk03] ont exhibé une courbe de Shimura contre-exemple au principe de Hasse;
- enfin Sarnak et Wang [SW95] ont construit une hypersurface lisse de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^4$ de degré 1130 qui est un contre-exemple au principe de Hasse, sous réserve que la conjecture de Lang (cf. [La91] conjecture 1.2 p.179) tienne.

Ce dernier contre-exemple nous intéresse particulièrement, puisque l'obstruction de Brauer-Manin d'une hypersurface lisse de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^4$ est nulle. Comme le résultat de Skorobogatov que l'on veut utiliser est fortement lié à cette obstruction, nous rappelons ici sa construction.

2.3.1 Construction de l'obstruction de Brauer-Manin

Soit X une k -variété propre. On a un accouplement naturel:

$$(Acc) : X(k) \times \text{Br } X \longrightarrow \text{Br } k$$

$$(x, b) \longmapsto x^*b$$

que l'on peut décrire de la manière suivante: comme d'après nos hypothèses $\bar{k}[X]^* = \bar{k}^*$, la suite spectrale de Leray:

$$E_2^{p,q} = H^p(k, R^q\pi_*\mathbb{G}_{m,X}) \implies H^{p+q}(X, \mathbb{G}_{m,X}) = E^{p+q}$$

fournit la suite longue de cohomologie:

$$0 \longrightarrow \text{Pic } X \longrightarrow (\text{Pic } \bar{X})^\Gamma \longrightarrow \text{Br } k \longrightarrow \text{Br } X \longrightarrow H^1(k, \text{Pic } \bar{X}) \longrightarrow 0$$

Si x est un point rationnel, c'est-à-dire une section du morphisme structural:

$$\begin{array}{ccc} & x & \\ X & \xrightarrow{\pi} & \text{Spec } k \end{array}$$

alors il fournit une rétraction notée x^* de l'edge:

$$\begin{array}{ccc} E_2^{2,0} = \text{Br } k & \longrightarrow & \text{Br } X = E^2 \\ & \curvearrowleft x^* & \end{array}$$

Le morphisme x^* ainsi décrit est celui intervenant dans la définition de l'accouplement (Acc) .

Remarque 2.3.1.1. Dans le cas où X est une variété pour laquelle la “conjecture de Grothendieck” sur les groupes de Brauer est vraie, on a une interprétation plus géométrique pour le morphisme x^* .

Supposons que X soit une telle variété. Soit $b \in \text{Br } X$. Notons \mathcal{A} une algèbre d’Azumaya sur X correspondant¹¹ à b ; alors x^*b n'est autre que la fibre \mathcal{A}_x de \mathcal{A} au point x . Évidemment, \mathcal{A}_x est une k -algèbre simple centrale, car c'est une $k(x)$ -algèbre simple centrale, et la rationalité de x entraîne $k(x) = k$.

On veut maintenant rendre local l'accouplement (Acc) . Pour toute place $v \in \Omega_k$ on peut évidemment définir de la même manière que (Acc) un accouplement:

$$(Acc_v) : X(k_v) \times \text{Br } X \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$$(x_v, b) \longmapsto \text{inv}_v(x_v^*b)$$

où $\text{inv}_v : \text{Br } k_v \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est l'invariant fourni par la théorie du corps de classes. En effet, comme x_v est un point de X à valeurs dans $\text{Spec } k_v$, le diagramme ci-dessous est

¹¹On entend par là que: $\Delta([\mathcal{A}]) = b$, où $\Delta : \text{Br}_{Az}X \rightarrow \text{Br } X$ est le morphisme de Grothendieck.

commutatif:

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ & \swarrow x_v & \downarrow \pi \\ \mathrm{Spec} \ k_v & \xrightarrow{p_v} & \mathrm{Spec} \ k \end{array}$$

et x_v induit donc un morphisme:

$$x_v^* : \mathrm{Br} \ X \longrightarrow \mathrm{Br} \ k_v$$

Remarque 2.3.1.2. Une fois encore, si $\mathrm{Br}_{Az}X = \mathrm{Br} X$, on a une interprétation géométrique de x_v^* . En effet, soit $b \in \mathrm{Br} X$, et soit \mathcal{A} une algèbre d'Azumaya correspondant à b . Dans ce cas x_v^*b n'est autre que le pullback de \mathcal{A} par le morphisme x_v :

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{A} & \\ & \searrow & \downarrow \\ x_v^*b \approx \mathcal{A} \times_X \mathrm{Spec} \ k_v & \nearrow & \downarrow \\ | & & | \\ | & & | \\ | & & | \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathrm{Spec} \ k_v & \xrightarrow{p_v} & \mathrm{Spec} \ k \end{array}$$

On définit maintenant un accouplement global à l'aide de la famille d'accouplements locaux (Acc_v):

$$\langle \bullet, \bullet \rangle : X(\mathbb{A}_k) \times \mathrm{B}(X) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$$((x_v)_v, b) \longmapsto \sum_{v \in \Omega_k} \mathrm{inv}_v(x_v^* \tilde{b})$$

où \tilde{b} désigne un représentant dans $\mathrm{Br}^{alg}X \subset \mathrm{Br} X$ de b . Il n'est *a priori* pas évident que $\langle (x_v)_v, b \rangle$ soit bien défini par la formule ci-dessus. Nous rappelons brièvement les arguments qui prouvent la cohérence de cette définition.

Fait 2.3.1.3. La somme $\sum_{v \in \Omega_k} \mathrm{inv}_v(x_v^* \tilde{b})$ est finie.

PREUVE: puisque $(x_v)_v \in X(\mathbb{A}_k)$, on a $x_v^*b \in \mathrm{Br} \mathcal{O}_v$, pour presque tout $v \in \Omega_k$, d'où la conclusion puisque $\mathrm{Br} \mathcal{O}_v = 0$ (cf. [Mi80]).

□

Fait 2.3.1.4. La valeur de la somme $\sum_{v \in \Omega_k} \text{inv}_v(x_v^* \tilde{b})$ ne dépend pas du représentant $\tilde{b} \in \text{Br}^{alg} X$ de b choisi.

PREUVE: soient \tilde{b} et \tilde{b}' deux représentants de b . Alors il existe $c \in \text{Br}^{cst} X$ tel que¹²:

$$\tilde{b} = \tilde{b}' + c$$

Donc:

$$\sum_{v \in \Omega_k} \text{inv}_v(x_v^* \tilde{b}) = \sum_{v \in \Omega_k} \text{inv}_v(x_v^* \tilde{b}') + \sum_{v \in \Omega_k} \text{inv}_v(x_v^* c)$$

On déduit de la suite exacte:

$$(S7) : \quad 0 \longrightarrow \text{Br } k \longrightarrow \bigoplus_{v \in \Omega_k} \text{Br } k_v \xrightarrow{\sum \text{inv}_v} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

la nullité de la somme $\sum_{v \in \Omega_k} \text{inv}_v(x_v^* c)$, ce qui achève la preuve du fait.

□

Les deux faits précédents nous assurent donc que l'accouplement $\langle \bullet, \bullet \rangle$ est bien défini. Nous énonçons maintenant sa propriété fondamentale:

Proposition 2.3.1.5. *Avec les notations introduites précédemment:*

(i) *La valeur de l'accouplement:*

$$\langle (x_v)_v, b \rangle$$

ne dépend pas du point adélique de X choisi.

(ii) *Si $(x_v)_v \in X(\mathbb{A}_k)$ appartient à l'image du morphisme diagonal:*

$$X(k) \longrightarrow \prod_{v \in \Omega_k} X(k_v)$$

alors: $\langle (x_v)_v, b \rangle = 0$.

PREUVE: soient $(x_v)_v \in X(\mathbb{A}_k)$ et $b \in \text{Br}(X)$. Choisissons un représentant $\tilde{b} \in \text{Br}^{alg} X$ de b . Pour toute place v de k , on a:

$$\text{loc}_v(b) \in \text{Br}^{cst} X_v$$

ce qui prouve (i).

Soient maintenant $b \in \text{Br}(X)$ et \tilde{b} un représentant de b . On a:

$$x_v^* \tilde{b} = (x \circ p_v)^* \tilde{b} = p_v^*(x_v^* \tilde{b}), \quad \forall v \in \Omega_k,$$

et $x_v^* \tilde{b} \in \text{Br } k$.

¹²On a noté: $\text{Br}^{cst} X = \text{im}\{\text{Br } k \longrightarrow \text{Br } X\}$.

En utilisant une nouvelle fois l'exactitude de la suite $(S7)$, on en déduit finalement que:

$$\langle (x_v)_v, b \rangle = 0$$

□

En conclusion, on a donc défini un morphisme de groupes:

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{H}, \mathbb{B}(\mathcal{X})}(X) : \mathbb{B}(X) &\longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ b &\longmapsto \sum_{v \in \Omega_k} \text{inv}_v(x_v^* \tilde{b}) \end{aligned}$$

où $(x_v)_v \in X(\mathbb{A}_k)$ est quelconque, et \tilde{b} est un représentant de b dans $\text{Br}^{alg}X$. De la proposition précédente, on déduit alors le:

Théorème 2.3.1.6.

$$\text{Si } X(k) \neq \emptyset, \text{ alors } m_{\mathcal{H}}(X) = 0 \in \mathbb{B}(X)^D.$$

Notons enfin pour terminer ces rappels que (voir p. 45):

$$(\clubsuit) \quad \mathbb{B}(X)^D \approx \text{III}^1(k, \text{Pic } \bar{X})^D$$

puisque l'on déduit de la suite exacte:

$$\text{Br } k \longrightarrow \text{Br}^{alg}X \longrightarrow H^1(k, \text{Pic } \bar{X}) \longrightarrow 0$$

l'isomorphisme:

$$\text{Br}_a X \approx H^1(k, \text{Pic } \bar{X})$$

puis l'isomorphisme (\clubsuit) , en “passant aux noyaux sur toutes les places” et en dualisant.

2.3.2 Exemples de calculs de $m_{\mathcal{H}, \mathbb{B}(\mathcal{X})}(X)$

Exemple 2.3.2.1 (Variétés de Severi-Brauer et intersections complètes lisses). D'après la proposition 2.1.13, on a le:

Lemme 2.3.2.2. *Si V est une k -variété de Severi-Brauer ou une intersection complète lisse de dimension ≥ 3 , alors $m_{\mathcal{H}, \mathbb{B}(\mathcal{X})}(V) = 0$.*

Exemple 2.3.2.3 (Surfaces de Del Pezzo). Rappelons que l'on appelle *surface de Del Pezzo* une surface projective lisse dont le diviseur anticanonique est ample. Le plan projectif est un exemple de surface de Del Pezzo¹³. Un exemple moins trivial est fourni par la surface cubique non-singulière de \mathbb{P}^3 . Cette dernière est obtenue en éclatant \mathbb{P}^2 en 6 points en position générale (non co-coniques et 3 à 3 non-alignés). Donc son groupe de Picard est \mathbb{Z}^7 (un premier exemplaire de \mathbb{Z} correspond à \mathbb{P}^2 , et les 6 autres sont fournis

¹³Puisque $K_{\mathbb{P}^2} = -3\mathbb{P}^1$, d'après [Hart77] II.8.20.1.

par les diviseurs exceptionnels correspondant aux éclatements successifs). D'une manière plus générale, une surface de Del Pezzo est toujours obtenue en éclatant \mathbb{P}^2 en un certain nombre de points (*cf.* [Ma74]), et son groupe de Picard est donc toujours de la forme \mathbb{Z}^N . Si Γ opère trivialement sur \mathbb{Z}^N (c'est alors un Γ -module de permutation), on a (*cf.* [CTS87]):

$$\mathrm{III}^1(k, \mathbb{Z}^N) = 0$$

d'où la nullité de $m_{\mathcal{H}, \mathrm{B}(X)}(X)$ dans ce cas.

Exemple 2.3.2.4 (Espaces homogènes sous SL_n avec isotropie finie). Soit \bar{H} un sous-groupe fini (non-nécessairement abélien) de $SL_n(\bar{k})$.¹⁴ On considère alors le \bar{k} -espace homogène:

$$\bar{V} = SL_n(\bar{k}) / \bar{H}$$

On choisit X une k -forme¹⁵ de \bar{V} . D'après le corollaire 4.6 de [FI73], on a:

$$\mathrm{Pic} \bar{X} = \widehat{\bar{H}}$$

Il s'ensuit que l'obstruction de Brauer-Manin d'une telle variété X n'est en général pas nulle.

Lemme 2.3.2.5. *Soient n un entier, et \bar{H} un \bar{k} -groupe algébrique qui est un sous-groupe de $SL_n(\bar{k})$. Soit X une k -forme de $SL_n(\bar{k}) / \bar{H}$. Alors:*

$$m_{\mathcal{H}}(X) \in \mathrm{III}^1\left(k, \widehat{\bar{H}}\right)$$

Nous terminons ces exemples en faisant le lien entre cette remarque et la dualité de Tate-Poitou. On suppose maintenant \bar{H} abélien fini, et on note toujours X une forme de $SL_n(\bar{k}) / \bar{H}$. On peut associer à X la gerbe de ses trivialisations, c'est-à-dire la gerbe \mathcal{G}_X qui mesure l'obstruction à ce que X soit dominé par un SL_n -torseur sur k (nécessairement trivial). Dans la terminologie de Springer [Sp66], la donnée de X correspond à la donnée d'un 1-cocycle à valeurs dans $SL_n(\bar{k}) / \bar{H}$, et \mathcal{G}_X est alors la classe du 2-cocycle à valeurs dans \bar{H} mesurant ce qui empêche de relever en un 1-cocycle à valeurs dans $SL_n(\bar{k})$.

Supposons que X ait un point partout localement. Alors¹⁶:

$$\mathcal{G}_X \in \mathrm{III}^2\left(k, \bar{H}\right)$$

Moyennant la définition de la cohomologie à valeurs dans un topos localement annelé (*cf.* [SGA4-V]) on peut définir l'obstruction de Brauer-Manin¹⁷ de la gerbe \mathcal{G}_X , notée $m_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}_X)$ [DEZ03]. Celle-ci a le bon goût de satisfaire la propriété suivante:

¹⁴En particulier, \bar{H} est un \bar{k} -groupe algébrique; il ne provient pas nécessairement d'un groupe défini sur k .

¹⁵Il est un peu abusif d'utiliser parler de “ k -forme” ici; nous voulons juste dire que X est une k -variété telle que: $X \otimes_k \bar{k} \approx \bar{V}$.

¹⁶Pour être complètement rigoureux, il eût fallu dire: \mathcal{G}_X représente une classe dans $\mathrm{III}^2(k, \bar{H})$. Cet abus est justifié par le fait que si un représentant dans une classe d'équivalence est une gerbe neutre, alors tous les représentants de cette classe sont des gerbes neutres.

¹⁷Nous renvoyons au chapitre IV pour la définition de l'obstruction de Brauer-Manin d'une gerbe.

Proposition 2.3.2.6. *Avec les notations introduites ci-dessus:*

- (i) $m_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}_X) = m_{\mathcal{H}}(X)$;
- (ii) la dualité de Tate-Poitou:

$$\mathrm{III}^2(k, \bar{H}) \times \mathrm{III}^1(k, \hat{H}) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

est explicitement réalisée grâce à l'obstruction de Brauer-Manin des gerbes, dans le sens où:

$$m_{\mathcal{H}} : \mathrm{III}^2(k, \bar{H}) \longrightarrow \mathrm{III}^1(k, \hat{H})^D$$

$$\mathcal{G} \longmapsto m_{\mathcal{H}}(\mathcal{G})$$

est un isomorphisme de groupes.

PREUVE: c'est une conséquence de la proposition 3.2 de [DEZ03].

□

2.3.3 Brauer-Manin orthogonalité et descente

Après ces quelques exemples et avant d'énoncer le théorème de Skorobogatov, il nous faut introduire un peu de terminologie:

Définition 2.3.3.1. *Un point adélique $(x_v)_v \in X(\mathbb{A}_k)$ est dit **Brauer-Manin orthogonal** à $b \in \mathrm{Br} X$ si:*

$$\sum_{v \in \Omega_k} \mathrm{inv}_v(x_v^* b) = 0$$

cette somme étant finie d'après le fait 2.3.4. Soit B une partie de $\mathrm{Br} X$; le point adélique $(x_v)_v$ est dit **Brauer-Manin orthogonal** à B s'il est Brauer-Manin orthogonal à tout $b \in B$. On note:

$$X(\mathbb{A}_k)^B = \left\{ (x_v)_v \in X(\mathbb{A}_k) \mid \sum_{v \in \Omega_k} \mathrm{inv}_v(x_v^* b) = 0, \forall b \in B \right\}$$

l'ensemble des points adéliques Brauer-Manin orthogonaux à B .

Exemple 2.3.3.2. D'après les exemples précédents tout point adélique sur une variété de Severi-Brauer (resp. une intersection complète lisse dans \mathbb{P}^n de dimension ≥ 3 , resp. une surface de Del Pezzo) X est Brauer-Manin orthogonal à $\mathrm{Br} X$, i.e:

$$X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br} X} = X(\mathbb{A}_k)$$

Soit B une partie de $\mathrm{Br} X$. On a la suite d'inclusions:

$$X(k) \subset X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br} X} \subset X(\mathbb{A}_k)^B \subset X(\mathbb{A}_k) \quad (2.1)$$

où la première inclusion découle de la proposition 2.3.1.5(ii), et les deux autres sont triviales. Nous allons justement introduire un nouveau maillon dans cette chaîne. Soit M un k -groupe algébrique abélien, tel que $\bar{M}_X(\bar{X}) = \bar{M}(\bar{k})$ (e.g. M fini). De la suite spectrale “des Ext” [CTS87]:

$$\mathrm{Ext}_{(\mathrm{Spec} k)_{\acute{e}t}}^p(M, R^q\pi_*\mathbb{G}_{m,X}) \Longrightarrow \mathrm{Ext}_{X_{\acute{e}t}}^{p+q}(M_X; \mathbb{G}_{m,X})$$

on déduit la suite à 5 termes:

$$H^1(k, M) \longrightarrow H^1(X, M_X) \xrightarrow{\text{type}} \mathrm{Hom}_{\Gamma}\left(\widehat{M(\bar{k})}, \mathrm{Pic} \bar{X}\right) \xrightarrow{\partial} H^2(k, M) \longrightarrow H^2(X, M_X)$$

Définition 2.3.3.3. Soit $Y \rightarrow X$ un M_X -torseur. On appelle **type de Y** l’image de $[Y]$ par le morphisme du même nom dans $\mathrm{Hom}_{\Gamma}\left(\widehat{M(\bar{k})}, \mathrm{Pic} \bar{X}\right)$. Si $\widehat{M(\bar{k})} = \mathrm{Pic} \bar{X}$, on appelle **torseur universel sur X** un M_X -torseur dont le type est l’identité de $\mathrm{Pic} \bar{X}$.

Remarque 2.3.3.4. L’exactitude de la suite ci-dessus a la conséquence suivante: pour tout $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\Gamma}\left(\widehat{M(\bar{k})}, \mathrm{Pic} \bar{X}\right)$:

$$\partial(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \text{il existe un } M_X\text{-torseur sur } X \text{ de type } \lambda.$$

La suite à 5 termes que l’on vient d’évoquer n’est évidemment pas sans rapport avec celle déduite de la suite spectrale de Leray:

$$H^1(k, M) \longrightarrow H^1(X, M_X) \longrightarrow H^1(\bar{X}, \bar{M}_X)^{\Gamma} \xrightarrow{D} H^2(k, M) \longrightarrow H^2(X, M_X)$$

Nous renvoyons à l’appendice B de [HS02] pour une comparaison détaillée de ces deux suites spectrales. Les groupes $H^1(\bar{X}, \bar{M}_X)^{\Gamma}$ et $\mathrm{Hom}_{\Gamma}\left(\widehat{M(\bar{k})}, \mathrm{Pic} \bar{X}\right)$ sont isomorphes (cf. [CTS87],[HS02]), et on note:

$$\tau : H^1(\bar{X}, \bar{M}_X)^{\Gamma} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Gamma}\left(\widehat{M(\bar{k})}, \mathrm{Pic} \bar{X}\right)$$

cet isomorphisme. Ceci nous amène à introduire une nouvelle définition:

Définition 2.3.3.5. Soit $\bar{Y} \rightarrow \bar{X}$ un \bar{M}_X -torseur sur \bar{X} de corps des modules k . On appelle **type de \bar{Y}** l’image de \bar{Y} par le morphisme τ .

On déduit des remarques précédentes le:

Lemme 2.3.3.6. Soit $\bar{Y} \rightarrow \bar{X}$ un \bar{M}_X -torseur de corps des modules k . Les assertions suivantes sont équivalentes:

- (i) $\bar{Y} \rightarrow \bar{X}$ est défini sur k ;
- (ii) la gerbe des modèles $D(\bar{Y})$ est neutre;
- (iii) la gerbe $\partial(\tau(\bar{Y}))$ est neutre;

(iv) il existe un M_X -torseur sur X de type $\tau(\bar{Y})$.

En outre, ces conditions sont évidemment satisfaites lorsque $X(k) \neq \emptyset$.

Soit $\lambda \in \text{Hom}_\Gamma\left(\widehat{M}(\bar{k}), \text{Pic } \bar{X}\right)$. On peut lui associer un morphisme de groupes:

$$\lambda_* : H^1\left(k, \widehat{M}\right) \longrightarrow H^1\left(k, \text{Pic } \bar{X}\right)$$

l'image d'un \widehat{M} -torseur $Y \rightarrow \text{Spec } k$ par λ_* étant donnée par extension du groupe structural à l'aide de λ : explicitement, le torseur $\lambda_* Y$ n'est autre que le $\text{Pic } \bar{X}$ -torseur:

$$\begin{array}{ccc} Y \wedge^\lambda \text{Pic } \bar{X} \\ \downarrow \\ \text{Spec } k \end{array}$$

obtenu à l'aide du produit contracté défini via le morphisme λ [Gi71]. Notons maintenant r le morphisme naturel¹⁸:

$$r : \text{Br}^{alg} X \longrightarrow H^1\left(k, \text{Pic } \bar{X}\right)$$

Définition 2.3.3.7. Avec les notations adoptées ci-dessus, on pose:

$$\text{Br}_\lambda X = r^{-1}\left[\lambda_* H^1\left(k, \widehat{M}\right)\right]$$

On a évidemment la chaîne d'inclusions:

$$X(k) \subset X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br } X} \subset X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}_\lambda X} \subset X(\mathbb{A}_k) \quad (2.2)$$

Le point fondamental est alors le résultat de Skorobogatov:

Théorème 2.3.3.8 (Theorem 3, [Sk99]). Supposons que \bar{M} soit un Γ -module de type fini en tant que groupe abélien. Si $X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}_\lambda X} \neq \emptyset$, alors les conditions équivalentes du lemme 2.3.3.6 sont satisfaites.

Autrement dit:

Corollaire 2.3.3.9. L'existence d'un point adélique sur X Brauer-Manin orthogonal à $\text{Br}_\lambda X$ entraîne l'existence d'un modèle pour tout M_X -torseur sur \bar{X} de corps des modules k et de type λ .

Exemple 2.3.3.10 (Application aux G -revêtements sur des espaces homogènes). On fixe H un k -groupe algébrique abélien fini, et on choisit un entier n de telle sorte que

¹⁸C'est le morphisme: $\ker\left\{E^2 \rightarrow E_2^{2,0}\right\} \longrightarrow E_2^{1,1}$ déduit de la suite spectrale de Leray.

H se réalise comme un sous-groupe de $SL_n(k)$ (on peut par exemple prendre $n = |H|$, mais un tel n n'est évidemment pas unique). On choisit X une k -forme de $SL_n(\bar{k})/\bar{H}$. On a:

$$\mathrm{Pic} \bar{X} = \widehat{\bar{H}}$$

Soit $\bar{Y} \rightarrow \bar{X}$ un $\widehat{\bar{H}}$ -torseur sur \bar{X} de corps des modules k . Du fait que \bar{H} est abélien fini, c'est aussi un $\widehat{\bar{H}}$ -revêtement de \bar{X} . On note $\tau(\bar{Y})$ le type du revêtement \bar{Y} . On déduit de ce qui précède le:

Lemme 2.3.3.11. *S'il existe sur X un point adélique Brauer-Manin orthogonal à $\mathrm{Br}_{\tau(\bar{Y})} X$, alors le $\widehat{\bar{H}}$ -revêtement $\bar{Y} \rightarrow \bar{X}$ est défini sur k .*

Remarque 2.3.3.12. Une fois encore, on se rend compte que l'énoncé de Skorobogatov fournit donc une condition suffisante beaucoup plus faible que l'existence d'un point rationnel pour qu'un revêtement abélien soit défini sur son corps des modules. Il convient malgré tout de tempérer ce résultat par la remarque suivante: le théorème 2.3.3.8 ne donne aucune information quant aux revêtements sur des variétés de Severi-Brauer, etc... D'ailleurs, plus généralement, cet énoncé est "vide" pour des k -variétés telles que $\mathrm{Pic} \bar{X}$ soit sans torsion (*e.g.* des variétés rationnelles [CTS87]). En effet, puisque M est fini, il existe des types intéressants (non-triviaux) dans

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma} \left(\widehat{M}, \mathrm{Pic} \bar{X} \right)$$

si $\mathrm{Pic} \bar{X}$ possède de la torsion.

Remarque 2.3.3.13. Evidemment, on aimeraient beaucoup pouvoir étendre ce théorème au cas non-abélien. Les obstacles sont de deux sortes. Premièrement, il faut faire une croix sur les suites spectrales. La conséquence la plus fâcheuse de cette disparition est que l'on n'a plus aucune raison d'avoir un isomorphisme:

$$H^1(\bar{X}, \bar{M}_X)^{\Gamma} \approx \mathrm{Hom}_{\Gamma} \left(\widehat{M(\bar{k})}, \mathrm{Pic} \bar{X} \right)$$

Adieu donc notre belle correspondance entre types et revêtements de corps des modules k !

La seconde conséquence, non moins fâcheuse, est que la dualité de Tate-Poitou ne tient plus. Plus précisément, lorsque H n'est plus abélien, l'obstruction de Brauer-Manin (des gerbes) permet juste de définir une application [DEZ03]:

$$m_{\mathcal{H}} : \mathrm{III}^2(k, \text{lien } H) \longrightarrow \mathrm{III}^1 \left(k, \widehat{\bar{H}} \right)^D$$

mais cette application n'a plus aucune raison d'être un isomorphisme. Or le théorème de Skorobogatov utilise de manière essentielle la dualité de Tate-Poitou...

Chapter 3

Descente de torseurs et points rationnels: le cas non-abélien

L'objectif de ce chapitre est de comprendre ce qui empêche de généraliser d'une manière franchement satisfaisante au cas non-abélien les résultats du chapitre précédent. On considère toujours un corps k de caractéristique nulle, X un k -schéma et un k -groupe algébrique G non-nécessairement abélien; il n'est donc plus question d'utiliser des suites spectrales. Le plan que nous suivrons dans ce chapitre est le suivant. Dans un premier temps, nous donnerons une interprétation purement topologique de la suite d'ensembles pointés:

$$0 \longrightarrow H^1(k, \pi_* G_X) \longrightarrow H^1(X, G_X) \xrightarrow{u} H^0(k, R^1 \pi_* \bar{G}_X)$$

et nous déterminerons les conditions sur G permettant de “prolonger” cette suite au cas non-abélien. Dans un deuxième temps, nous donnerons une preuve du résultat principal inspirée de la preuve du théorème de Combes-Harbater pour les revêtements (pour laquelle je tiens à remercier Michel Emsalem). Nous nous intéresserons ensuite au cas des groupes non-abéliens finis, pour lesquels (assez ironiquement d'ailleurs) tout fonctionne à merveille. Enfin, nous tâcherons de passer en revue les obstructions à ce que l'on puisse dans le cas général calculer “explicitement” le lien de la gerbe des torseurs d'un \bar{G}_X -torseur $\bar{P} \rightarrow \bar{X}$ de corps des modules k , et en particulier l'obstruction à ce que ce lien soit représentable (ou juste localement représentable) par un k -groupe algébrique, même lorsque le groupe G dont on part est le plus sympathique possible (par exemple semi-simple simplement connexe). La clef de ce chapitre est de toute façon liée au lemme fondamental (lemme 1.2.14), dont nous rappelons ici l'énoncé:

Lemme fondamental. *Soient S un schéma, G_S un schéma en groupes sur S , et P un G_S -torseur sur S . Alors $\text{ad}_{G_S}(P)$ est une S -forme intérieure de G_S ; autrement dit:*

$$\text{ad}_{G_S}(P) \text{ représente une classe de } H^1(S, \text{Int } G_S).$$

En particulier, si G_S est abélien, alors:

$$\text{ad}_{G_S}(P) \approx G_S$$

3.1 Une interprétation topologique

Avant de décrire complètement la suite

$$0 \longrightarrow H^1(k, \pi_* G_X) \longrightarrow H^1(X, G_X) \xrightarrow{u} H^0(k, R^1 \pi_* \bar{G}_X)$$

il nous semble indispensable ici, au vu des considérations qui vont suivre, de faire quelques rappels sur les différents ensembles pointés intervenant dans cette suite.

Soient Y un k -schéma et G un k -groupe algébrique (non-nécessairement abélien). Ainsi on a une bijection (d'après le corollaire 4.7 p.123 de [Mi80]):

$$\text{EHP}(G_Y/Y) \longrightarrow H^1(Y, G_Y)$$

Rappelons brièvement comment l'on obtient cette bijection.

- 1-cocycle associé à un G_Y -torseur sur Y

Soit P un G_Y -torseur sur Y . Alors il existe un recouvrement étale $(Y_\alpha/Y)_{\alpha \in A}$ tel que $P|_{Y_\alpha}$ soit trivial, pour tout $\alpha \in A$. Le choix d'une section

$$p_\alpha \in P(Y_\alpha)$$

pour tout α fournit un isomorphisme de torseurs:

$$\eta_\alpha^P : P|_{Y_\alpha} \longrightarrow G_{Y_\alpha, d}, \quad \forall \alpha \in A$$

défini par:

$$\eta_\alpha^P(p_\alpha) = e, \quad \forall \alpha \in A$$

Soit maintenant $(\alpha, \beta) \in A \times A$. La simple transitivité de l'action de $G_Y(Y_{\alpha\beta})$ (où on a évidemment noté $Y_{\alpha\beta} = Y_\alpha \times_Y Y_\beta$) entraîne l'existence et l'unicité d'un $g_{\alpha\beta}^P \in G_Y(Y_{\alpha\beta})$ tel que:

$$p_\beta|_{Y_{\alpha\beta}} = p_\alpha|_{Y_{\alpha\beta}} \cdot g_{\alpha\beta}$$

cette égalité ayant lieu dans $P(Y_{\alpha\beta})$. Il est immédiat¹ que la famille $(g_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta} \in A$ est un 1-cocycle à valeurs dans G_Y .

La classe de ce 1-cocycle ne dépend pas du choix des sections locales de P ; en effet, soit $(p'_\alpha)_\alpha$ une autre famille de sections, avec:

$$p_\alpha \in P(Y_\alpha), \quad \forall \alpha \in A$$

Alors:

$$\forall \alpha \in A, \exists! h_\alpha^P \in G_Y(Y_\alpha) \text{ t.q.: } p'_\alpha = p_\alpha \cdot h_\alpha^P \in P(Y_\alpha)$$

¹En utilisant encore la simple transitivité de l'action de G_Y .

Au-dessus de $Y_{\alpha\beta}$, on dispose des relations:

$$\left\{ \begin{array}{l} p'_\alpha|_{Y_{\alpha\beta}} = p_\alpha|_{Y_{\alpha\beta}} \cdot h_\alpha^P|_{Y_{\alpha\beta}} \\ p'_\beta|_{Y_{\alpha\beta}} = p_\beta|_{Y_{\alpha\beta}} \cdot h_\beta^P|_{Y_{\alpha\beta}} \\ p_\beta|_{Y_{\alpha\beta}} = p_\alpha|_{Y_{\alpha\beta}} \cdot g_{\alpha\beta}^P \\ p'_\beta|_{Y_{\alpha\beta}} = p'_\alpha|_{Y_{\alpha\beta}} \cdot g'_{\alpha\beta}^P \end{array} \right.$$

D'une part, on déduit de la première et de la dernière relation la nouvelle condition:

$$p'_\beta|_{Y_{\alpha\beta}} = p_\alpha|_{Y_{\alpha\beta}} \cdot h_\alpha^P \cdot g'_{\alpha\beta}^P$$

et on obtient d'autre part à l'aide des deux autres relations:

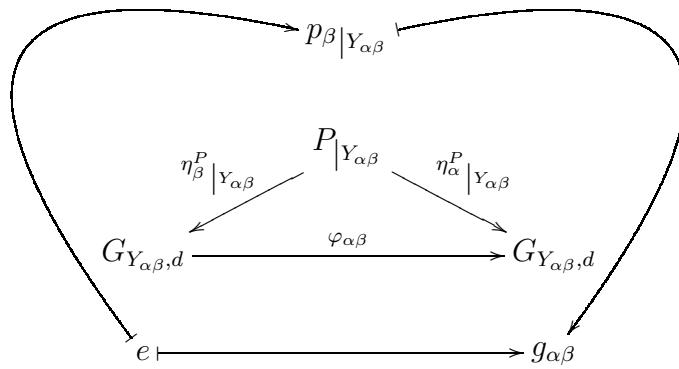
$$p'_\beta|_{Y_{\alpha\beta}} = p_\alpha|_{Y_{\alpha\beta}} \cdot g_{\alpha\beta}^P \cdot h_\beta^P$$

Par suite:

$$g'_{\alpha\beta}^P = (h_\alpha^P)^{-1} \cdot g_{\alpha\beta}^P \cdot h_\beta^P, \quad \forall (\alpha, \beta) \in A \times A$$

ce qui prouve justement que les 1-cocycles $(g_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in A}$ et $(g'_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in A}$ sont cohomologues.

Remarque 3.1.1. Explicitement, il revient au même de dire que le G_Y -torseur P est obtenu en recollant les torseurs triviaux $G_{Y_\alpha, d}$ à l'aide des $g_{\alpha\beta}$. Plus précisément, le choix d'une famille de sections locales $(p_\alpha)_{\alpha \in A}$ pour P entraîne l'existence d'une famille d'automorphismes $\varphi_{\alpha\beta}$ des torseurs triviaux $G_{Y_{\alpha\beta}, d}$, ce que l'on illustre sur par le diagramme suivant:



Pour achever ces rappels sur les torseurs, montrons que deux torseurs P et P' isomorphes donnent lieu à des 1-cocycles cohomologues. On peut supposer qu'il existe un recouvrement étale $(Y_\alpha/Y)_{\alpha \in A}$ de Y trivialisant P et P' (il suffit de prendre "l'intersection" d'un recouvrement étale trivialisant P et d'un recouvrement étale trivialisant P'). On note alors $(g_{\alpha\beta}^P)_{\alpha, \beta \in A}$ (*resp.* $(g_{\alpha\beta}^{P'})_{\alpha, \beta \in A}$) le 1-cocycle associé comme précédemment à P (*resp.* à P') via le choix d'une famille de sections locales $(p_\alpha)_{\alpha \in A}$ (*resp.* $(p'_\alpha)_{\alpha \in A}$). On suppose donc qu'il existe un isomorphisme de G_Y -torseurs sur Y :

$$f : P' \longrightarrow P$$

En utilisant la simple transitivité de l'action de $G_Y(Y_\alpha)$ sur $P(Y_\alpha)$ pour tout $\alpha \in A$, on obtient:

$$\forall \alpha \in A, \exists! h_\alpha^{PP'} \in G_Y(Y_\alpha) \text{ t.q: } f|_{Y_\alpha}(p'_\alpha) = p_\alpha \cdot h_\alpha^{PP'}$$

Pour tout couple $(\alpha, \beta) \in A \times A$, on a encore, au-dessus de $Y_{\alpha\beta}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f|_{Y_{\alpha\beta}}(p'_\alpha|_{Y_{\alpha\beta}}) = p_\alpha|_{Y_{\alpha\beta}} \cdot h_\alpha^{PP'}|_{Y_{\alpha\beta}} \\ f|_{Y_{\alpha\beta}}(p'_\beta|_{Y_{\alpha\beta}}) = p_\beta|_{Y_{\alpha\beta}} \cdot h_\beta^{PP'}|_{Y_{\alpha\beta}} \\ p_\beta|_{Y_{\alpha\beta}} = p_\alpha|_{Y_{\alpha\beta}} \cdot g_{\alpha\beta}^P \\ p'_\beta|_{Y_{\alpha\beta}} = p'_\alpha|_{Y_{\alpha\beta}} \cdot g_{\alpha\beta}^{P'} \end{array} \right.$$

De la deuxième et de la troisième relation, on déduit:

$$f|_{Y_{\alpha\beta}}(p'_\beta|_{Y_{\alpha\beta}}) = p_\alpha|_{Y_{\alpha\beta}} \cdot g_{\alpha\beta}^P \cdot h_\beta^{PP'}|_{Y_{\alpha\beta}}$$

tandis que les deux extrêmes donnent:

$$f|_{Y_{\alpha\beta}}(p'_\beta|_{Y_{\alpha\beta}}) = p_\alpha|_{Y_{\alpha\beta}} \cdot h_\alpha^{PP'}|_{Y_{\alpha\beta}} \cdot g_{\alpha\beta}^{P'}$$

La simple transitivité de l'action de $G_Y(Y_{\alpha\beta})$ sur $P(Y_{\alpha\beta})$ pour tout couple $(\alpha, \beta) \in A \times A$ permet alors de conclure:

$$g_{\alpha\beta}^{P'} = \left(h_\alpha^{PP'}|_{Y_{\alpha\beta}} \right)^{-1} \cdot g_{\alpha\beta}^P \cdot h_\beta^{PP'}|_{Y_{\alpha\beta}}, \quad \forall (\alpha, \beta) \in A \times A$$

Ce qui achève de prouver que l'ensemble des classes d'isomorphie de G_Y -torseurs sur Y est en bijection avec les classes de cohomologie de 1-cocycles à valeurs dans G_Y .

- Description de l'ensemble $H^0(k, R^1\pi_*G_X)$

C'est l'ensemble des sections globales du k -faisceau $R^1\pi_*G_X$, qui est le faisceau associé au préfaisceau:

$$(\mathrm{Spec} L \rightarrow \mathrm{Spec} k) \rightsquigarrow H^1(X_L, G_{X_L})$$

L désignant dans la formule ci-dessus une extension étale de k . Une section globale est donc une classe:

$$\left[(L_i/k)_{i \in I}, (P_i)_{i \in I}, (\varphi_{ij})_{i,j \in I} \right]$$

où:

(i) L_i est une extension étale de k , $\forall i \in I$;

(ii) pour tout $i \in I$, P_i représente une classe de $H^1(X_{L_i}, G_{X_{L_i}})$;

(iii) pour tout $(i, j) \in I \times I$:

$$\varphi_{ij} : P_j \times_{X_{L_j}} X_{L_{ij}} \longrightarrow P_i \times_{X_{L_i}} X_{L_{ij}}$$

est un isomorphisme de $G_{X_{L_{ij}}}$ -torseurs sur $X_{L_{ij}}$, où l'on a noté $L_{ij} = L_i \otimes_k L_j$.

Deux telles classes

$$\left[(L_i/k)_{i \in I}, (P_i)_{i \in I}, (\varphi_{ij})_{i,j \in I} \right] \text{ et } \left[(L_{i'}/k)_{i' \in I'}, (P'_{i'})_{i' \in I'}, (\varphi_{i'j'})_{i',j' \in I'} \right]$$

sont équivalentes si et seulement si il existe un recouvrement étale² $(L_\alpha/k)_{\alpha \in A}$ raffinant l'intersection des deux précédents, et des isomorphismes:

$$\psi_\alpha : P'_i \times_{X_{L_i}} X_{L_\alpha} \longrightarrow P_i \times_{X_{L_i}} X_{L_\alpha}, \forall \alpha \in A$$

compatibles avec les isomorphismes φ_{ij} et $\varphi_{i'j'}$ dans le seul sens raisonnable que l'on puisse donner à cette formulation.

Nous passons maintenant à la description de la suite exacte d'ensembles pointés tant attendue.

• Description de l'application $a : H^1(k, \pi_* G_X) \longrightarrow H^1(X, G_X)$

Soit T un représentant d'une classe de $H^1(k, \pi_* G_X)$; c'est donc la donnée d'une famille d'extensions étales $(L_i/k)_{i \in I}$ et d'un 1-cocycle:

$$(\tau_{ij})_{i,j} \in Z^1((L_i/k), \pi_* G_X)$$

Par conséquent, pour tout $(i, j) \in I \times I$, on a:

$$\tau_{ij} \in \pi_* G_X(L_{ij})$$

Or, par définition de l'image directe d'un faisceau:

$$\pi_* G_X(L_{ij}) = G_X(\pi^{-1}(L_{ij})) = G_X(X_{L_{ij}})$$

Notons maintenant:

$$\widetilde{\tau_{ij}} \in G_X(X_{L_{ij}})$$

l'élément τ_{ij} , vu comme une section du faisceau G_X . Il est alors évident que l'on obtient un 1-cocycle:

$$(\widetilde{\tau_{ij}}) \in Z^1((X_{L_i}/X), G_X)$$

On peut alors définir $a([T])$ comme la classe du G_X -torseur sur X correspondant à ce 1-cocycle. Pour cela, il suffit de vérifier l'indépendance du représentant choisi pour la classe de T : soit donc $(\tau'_{ij})_{i,j \in I}$ un 1-cocycle à valeurs dans $\pi_* G_X$ cohomologique au 1-cocycle $(\tau_{ij})_{i,j}$. Il existe donc une 1-cochaîne:

$$(h_i)_{i \in I} \in C^1((L_i/k)_{i \in I}, \pi_* G_X)$$

²Il eût fallu écrire: le recouvrement étale $(\mathrm{Spec} L_\alpha \rightarrow \mathrm{Spec} k)_{\alpha \in A}$.

telle que:

$$\tau'_{ij} = \left(h_j|_{L_{ij}} \right)^{-1} \cdot \tau_{ij} \cdot h_i|_{L_{ij}} \in [\pi_* G_X](L_{ij}), \forall (i, j) \in I \times I$$

Or cette relation implique évidemment la suivante:

$$\widetilde{\tau}'_{ij} = \left(\widetilde{h}_j|_{X_{L_{ij}}} \right)^{-1} \cdot \widetilde{\tau}_{ij} \cdot \widetilde{h}_i|_{X_{L_{ij}}} \in [\pi_* G_X](L_{ij}), \forall (i, j) \in I \times I$$

où \widetilde{h}_i désigne l'élément h_i , qui appartient *a priori* à:

$$[\pi_* G_X](L_i)$$

vu comme un élément de:

$$G_X(X_{L_i})$$

Il s'ensuit que les 1-cocycles $(\widetilde{\tau}_{ij})_{i,j \in I}$ et $(\widetilde{\tau}'_{ij})_{i,j \in I}$ sont cohomologues, ce qui prouve la cohérence de la définition de l'application a . À de très légères modifications près, ce sont les mêmes arguments qui permettent de prouver la trivialité du noyau (au sens des ensembles pointés³ bien sûr) de l'application a . En outre, une conséquence immédiate des précédents calculs est la suivante:

Lemme 3.1.2. *L'image de l'application $a : H^1(k, \pi_* G_X) \rightarrow H^1(X, G_X)$ s'identifie à l'ensemble des classes d'isomorphie de G_X -torseurs sur X trivialisés par un recouvrement étale de X “provenant de k ”. Plus précisément, l'image de l'application a est constituée des classes d'isomorphie de G_X -torseurs $P \rightarrow X$ pour lesquels il existe une famille d'extensions étales $(L_i/k)_{i \in I}$ telle que:*

$$P \times_X X_{L_i} \simeq G_{X_{L_i}, d}, \forall i \in I$$

Remarque 3.1.3. Dans le contexte des chapitres précédents, l'image de a est donc constituée des classes d'isomorphie de G_X -torseurs $P \rightarrow X$ tels que $\bar{P} \simeq \bar{G}_{X,d}$.

Remarque 3.1.4. En reprenant les notations du paragraphe V.3.3.1 de [Gi71], on peut encore exprimer le fait précédent en disant que l'image de a est la catégorie:

$$\text{Tors}(X, G_X)^{(\text{Spec } k)_{\text{ét}}}$$

cette dernière étant une catégorie équivalente à la gerbe

$$\text{Tors}(k, \pi_* G_X)$$

³I.e. la préimage de la classe privilégiée de $H^1(X, G_X)$ par a est la classe privilégiée de $H^1(k, \pi_* G_X)$.

- Description de l'application $u : H^1(X, G_X) \longrightarrow H^0(k, R^1\pi_*G_X)$

On obtient évidemment cette application en associant à la classe $[P] \in H^1(X, G_X)$ la classe:

$$[(k/k), (P), (\text{id}_P)]$$

Il est maintenant immédiat, vues les précédentes descriptions de l'application a d'une part, et des sections globales du faisceau $R^1\pi_*G_X$ d'autre part, que le noyau (au sens non-abélien) est effectivement constitué des classes d'isomorphie de G_X -torseurs trivialisés par un recouvrement étale de X “provenant de k ”, ce qui achève de prouver l'exactitude de la suite d'ensembles pointés:

$$0 \longrightarrow H^1(k, \pi_*G_X) \xrightarrow{a} H^1(X, G_X) \xrightarrow{u} H^0(k, R^1\pi_*G_X)$$

- Obstruction non-abélienne

On rentre maintenant dans le vif du sujet avec l'étude de la surjectivité de l'application u . Considérons une classe:

$$\left[(L_i/k)_{i \in I}, (P_i)_{i \in I}, (\varphi_{ij})_{i,j \in I} \right]$$

dans $H^0(k, R^1\pi_*G_X)$. En choisissant un représentant de cette classe, on dispose donc d'une famille de torseurs $(P_i)_{i \in I}$, et d'isomorphismes⁴:

$$\varphi_{ij} : P_j \times_{X_{L_j}} X_{L_{ij}} \longrightarrow P_j \times_{X_{L_i}} X_{L_{ij}}$$

En d'autres termes, la famille $(\varphi_{ij})_{i,j \in I}$ constitue une donnée de recollement pour les torseurs P_i , et on veut mesurer ce qui l'empêche d'être une donnée de descente.

Pour tout triplet $(i, j, k) \in I^3$, on a le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} P_k \times_{X_{L_k}} X_{L_{ijk}} & \xrightarrow{\varphi_{ik}|_{X_{L_{ijk}}}} & P_i \times_{X_{L_i}} X_{L_{ijk}} \\ \varphi_{jk}|_{X_{L_{ijk}}} \searrow & \Downarrow c_{ijk} & \nearrow \varphi_{ij}|_{X_{L_{ijk}}} \\ & P_j \times_{X_{L_j}} X_{L_{ijk}} & \end{array}$$

où l'on a noté:

$$c_{ijk} = \varphi_{ij}|_{X_{L_{ijk}}} \circ \varphi_{jk}|_{X_{L_{ijk}}} \circ \left(\varphi_{ik}|_{X_{L_{ijk}}} \right)^{-1}$$

En particulier:

$$c_{ijk} \in \text{ad}_{G_{X_{L_{ijk}}}} \left(P_i \times_{X_{L_i}} X_{L_{ijk}} \right), \quad \forall (i, j, k) \in I^3$$

c'est-à-dire encore:

$$c_{ijk} \in [\pi_* \text{ad}_{G_X}(P_i)](L_{ijk}), \quad \forall (i, j, k) \in I^3$$

⁴De $G_{X_{L_{ij}}}$ -torseurs sur $X_{L_{ij}}$.

Remarque 3.1.5. Dans le cas abélien, on a évidemment:

$$c_{ijk} \in [\pi_* G_X] (L_{ijk}), \forall (i, j, k) \in I^3$$

et les c_{ijk} constituent donc un 2-cocycle à valeurs dans $\pi_* G_X$; plus précisément, la classe de ce 2-cocycle est justement l'image de la classe

$$\left[(L_i/k)_{i \in I}, (P_i)_{i \in I}, (\varphi_{ij})_{i,j \in I} \right]$$

par le cobord

$$H^0(k, R^1\pi_* G_X) \xrightarrow{\delta^1} H^2(k, \pi_* G_X)$$

Dans le cas non-abélien, la famille $(c_{ijk})_{i,j,k \in I}$ pourrait encore être vue comme un 2-cocycle, mais à valeurs dans un *système de coefficients* cf. [Do76], précisément celui défini par la famille de faisceaux locaux $(\pi_* \text{ad}_{G_X}(P_i))_{i \in I}$.

Il s'agit maintenant de comprendre pourquoi (dans le cas abélien comme dans le cas général) ce 2-cocycle devient trivial, c'est-à-dire de comprendre pourquoi les P_i se recollent effectivement, “une fois que l'on passe à X ”. Notons tout d'abord que l'on peut, comme dans la description de l'application a , associer au 2-cocycle constitué par les

$$c_{ijk} \in [\pi_* \text{ad}_{G_X}(P_i)] (L_{ijk})$$

un 2-cocycle sur X :

$$\widetilde{c_{ijk}} \in [\text{ad}_{G_X}(P_i)] (X_{L_{ijk}})$$

(dans le cas abélien, on a $\widetilde{c_{ijk}} \in G_X(X_{L_{ijk}})$). Or ce dernier peut être rendu trivial, puisque l'on dispose d'assez d'ouverts sur X pour pouvoir rendre tous les torseurs P_i triviaux.

Remarque 3.1.6. Une autre manière de dire les choses est que la gerbe sur X engendrée par les torseurs P_i est la gerbe des G_X -torseurs sur X , du fait que l'on peut localiser suffisamment de manière à rendre tous les P_i triviaux, ce qui n'est évidemment pas le cas si l'on se restreint aux ouverts étals de X “provenant de k ”.

Il reste encore à voir que l'existence d'un point k -rationnel sur X entraîne l'existence d'une rétraction de l'application:

$$\left[(c_{ijk})_{i,j,k} \right] \longmapsto [(\widetilde{c_{ijk}})]$$

On note maintenant

$$x : \text{Spec } k \longrightarrow X$$

un point k -rationnel de X . Dans le cas abélien, la rétraction est obtenue en envoyant la classe de $(\widetilde{c_{ijk}})$ sur la classe du 2-cocycle:

$$(q \circ \widetilde{c_{ijk}} \circ x_{ijk})$$

où:

$$x_{ijk} : \text{Spec } L_{ijk} \longrightarrow X_{ijk}$$

est induit par x , et où

$$q : G_X \longrightarrow G$$

est le morphisme évident (puisque G_X est le produit fibré $G \times_{\text{Spec } k} X$). Evidemment, le 2-cocycle $(q \circ \widetilde{c}_{ijk} \circ x_{ijk})_{i,j,k \in I}$ ainsi obtenu n'est qu'un cocycle à valeurs dans G , et ne correspond au cocycle initial $(c_{ijk})_{i,j,k \in I}$ que sous réserve que la condition:

$$\bar{G}_X(\bar{X}) = \bar{G}(\bar{k})$$

soit satisfaite.

Dans le cas non-abélien, on applique exactement le même raisonnement, pour aboutir à la même conclusion, à la différence (de taille!) près que l'on doit imposer la condition beaucoup plus contraignante suivante, si l'on souhaite pouvoir descendre tous les $G_{\bar{X}}$ -torseurs sur \bar{X} de corps des modules k :

Condition (\star): Pour toute \bar{X} -forme intérieure G' de \bar{G}_X , on a:

$$H^0(\bar{X}, G') = H^0(\bar{k}, G'_{\bar{x}})$$

Une justification plus rigoureuse de ce fait est apportée dans la section suivante.

3.2 Obstruction non-abélienne à l'existence d'un point k -rationnel

Soit $\bar{P} \rightarrow \bar{X}$ un \bar{G}_X -torseur de corps des modules k . On note $G' = \text{ad}_{G_{\bar{X}}}(\bar{P})$ le faisceau sur \bar{X} de ses automorphismes. D'après le lemme 1.2.14, c'est une forme intérieure sur \bar{X} de \bar{G}_X . On note encore:

$$\bar{x} : \text{Spec } \bar{k} \longrightarrow \bar{X}$$

le morphisme induit par x , et $G'_{\bar{x}}$ la fibre en ce point de G' . On dispose d'une flèche naturelle:

$$\varphi_{\bar{x}} : H^0(\bar{X}, G') \longrightarrow H^0(\text{Spec } \bar{k}, G'_{\bar{x}})$$

Remarque 3.2.1. Lorsque G est abélien, demander que la condition $\bar{G}_X(\bar{X}) = \bar{G}(\bar{k})$ soit satisfaite équivaut encore à demander que l'application ci-dessus soit bijective (et cette hypothèse n'est pas trop contraignante, du fait qu'il n'y a pas de \bar{X} -formes intérieures de \bar{G}_X autres que \bar{G}_X lui-même).

Théorème 3.2.2. Soient X un k -schéma, et G un k -groupe linéaire, et $\bar{P} \rightarrow \bar{X}$ un $G_{\bar{X}}$ -torseur de corps des modules k . On suppose que X possède un point k -rationnel x , et on suppose satisfaite la condition suivante:

Condition ($\star_{\bar{P}}$): En notant $G' = \text{ad}_{G_{\bar{X}}}(\bar{P})$ et \bar{x} un point géométrique associé au point k -rationnel x , on a:

$$H^0(\bar{X}, G') = H^0(\bar{k}, G'_{\bar{x}})$$

Alors $\bar{P} \rightarrow \bar{X}$ est défini sur k .

PREUVE. On note encore $G' = \text{ad}_{G_{\bar{X}}}(\bar{P})$ le faisceau sur \bar{X} des automorphismes de \bar{P} . Soit \bar{p} un point dans la fibre $\bar{f}^{-1}(\bar{x})$. Puisque \bar{P} est de corps des modules k , il existe un isomorphisme:

$$\varphi_\sigma : \bar{P} \longrightarrow {}^\sigma \bar{P}, \forall \sigma \in \Gamma$$

Par ailleurs $\bar{P}_{\bar{x}}$ est un $(\bar{G}_X)_{\bar{x}}$ -torseur, de groupe d'automorphismes $G'_{\bar{x}}$, ce dernier agissant simplement transitivement à droite sur $P_{\bar{x}}$. Comme x est un point k -rationnel, tous les isomorphismes φ_σ respectent la fibre au-dessus de \bar{x} , pour tout $\sigma \in \Gamma$. De plus, puisque la condition (\star) est satisfaite, on peut composer tout φ_σ à droite par un élément de $G'(\bar{X})$ de telle sorte que l'on ait:

$$\varphi_\sigma(\bar{p}) = {}^\sigma \bar{p}$$

En utilisant toujours la condition (\star) , cette propriété détermine uniquement φ_σ . Il s'ensuit immédiatement que pour tout couple (τ, σ) d'éléments de Γ , le diagramme ci-dessous commute:

$$\begin{array}{ccc} \bar{P} & \xrightarrow{\varphi_{\tau\sigma}} & {}^{\tau\sigma} \bar{P} \\ & \searrow \varphi_\tau & \nearrow {}^\tau \varphi_\sigma \\ & \tau \bar{P} & \end{array}$$

Donc $\bar{f} : \bar{P} \rightarrow \bar{X}$ est défini sur k .

□

Remarque 3.2.3. Evidemment, la condition (\star) est très lourde. On aurait envie qu'elle soit vérifiée par exemple pour les schémas en groupes linéaires au-dessus de variétés projectives. Ce n'est absolument pas le cas, comme le montre l'exemple suivant: on considère la droite projective $X = \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1$, munie du recouvrement par les ouverts standards $\{U_0, U_\infty\}$, où:

$$U_0 = \{(x : y) / y \neq 0\} \quad \text{et} \quad U_\infty = \{(x : y) / x \neq 0\}$$

Nous noterons:

$$U_{0\infty} = U_0 \cap U_\infty$$

On construit maintenant une forme intérieure G' du faisceau GL_{2, \mathbb{P}^1} en recollant les faisceaux GL_{2, U_0} et GL_{2, U_∞} au-dessus de $U_{0\infty}$ à l'aide de la conjugaison:

$$\chi : GL_{2, U_{0\infty}} = (GL_{2, U_0})_{|U_{0\infty}} \longrightarrow GL_{2, U_{0\infty}} = (GL_{2, U_\infty})_{|U_{0\infty}}$$

$$A \longmapsto M_{0\infty} \cdot A \cdot M_{0\infty}^{-1}$$

où:

$$M_{0\infty} = \begin{pmatrix} x^{-1} & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

Alors la section:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de GL_{2,U_0} fournit une section globale du faisceau G'

$$\left(\text{puisque: } M_{0\infty} \cdot A_0 \cdot M_{0\infty}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & x^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

non-constante. On ne peut donc pas espérer que G' provienne d'un \mathbb{Q} -groupe algébrique ici.

3.3 Le cas fini

Théorème 3.3.1. *Soient k un corps de caractéristique nulle, X un k -schéma géométriquement connexe, et G un k -groupe fini. Si $X(k) \neq \emptyset$, alors tout \bar{G}_X -torseur sur \bar{X} de corps des modules k est défini sur k .*

PREUVE. Notons $x : \text{Spec } k \rightarrow X$ un point k -rationnel de X , et soit $\bar{P} \rightarrow \bar{X}$ un \bar{G}_X -torseur de corps des modules k . On a alors un morphisme naturel de k -champs⁵:

$$\epsilon : D(\bar{P}) \longrightarrow \pi_* \text{Tors}(X, G_X)$$

La composante au-dessus d'un ouvert étale ($\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } k$) du morphisme en question est le foncteur évident:

$$\begin{aligned} \epsilon_L : \quad D(\bar{P})(L) &\longrightarrow \text{Tors}(X_L, G_{X_L}) \\ P_L &\longmapsto P_L \end{aligned}$$

En utilisant la formule d'adjonction pour les champs (*cf.* [Gi66] I.5.2.1):

$$\underline{\text{Cart}}_{X_{\text{ét}}}(\pi^* D(\bar{P}), \text{Tors}(X, G_X)) \approx \underline{\text{Cart}}_{(\text{Spec } k)_{\text{ét}}} (D(\bar{P}), \pi_* \text{Tors}(X, G_X))$$

on obtient l'existence d'un morphisme de gerbes (puisque l'image inverse d'une gerbe est une gerbe, [Gi71] V.1.4.2):

$$\phi : \pi^* D(\bar{P}) \longrightarrow \text{Tors}(X, G_X)$$

On veut prouver que ϕ est une équivalence. Notons $\mathcal{L}_{\bar{P}}$ le lien de la gerbe $D(\bar{P})$. Comme la gerbe image inverse par π de $D(\bar{P})$ est liée par l'image inverse du lien de $D(\bar{P})$ (*cf.* [Gi71] V.1.4.2), le morphisme ϕ est lié par un morphisme:

$$\Lambda : \pi^* \mathcal{L}_{\bar{P}} \longrightarrow \text{lien } G_X$$

D'autre part, il existe un recouvrement étale ($\text{Spec } L_i \rightarrow \text{Spec } k$) _{$i \in I$} , et des modèles locaux pour \bar{P} au-dessus de ces ouverts. Plus précisément, pour tout $i \in I$, il existe un G_{X_i} -torseur⁶ P_i sur X_i tel que:

$$P_i \times_{X_i} \bar{X} \approx \bar{P}$$

⁵En effet, $D(\bar{P})$ est une gerbe, mais $\pi_* \text{Tors}(X, G_X)$ n'est qu'un champ (*cf.* exemple 1.5.18). Par ailleurs, ce morphisme fait de $D(\bar{P})$ une *sous-gerbe maximale* du champ $\pi_* \text{Tors}(X, G_X)$ (*cf.* [Gi66] p.113).

⁶Pour alléger les notations, on a noté X_i le schéma $X \otimes_k L_i$.

Au-dessus d'un ouvert ($X_i \rightarrow X$), le morphisme Λ est représenté par le morphisme naturel de faisceaux de groupes sur le site étale de X_i (cf. [Gi66] IV.3.5.4):

$$\lambda_i : \pi^* \pi_* ad_{G_{X_i}}(P_i) \longrightarrow ad_{G_{X_i}}(P_i)$$

Du fait que ces $ad_{G_{X_i}}(P_i)$ sont finis, le morphisme d'adjonction ci-dessus est un isomorphisme (d'après la remarque 3.1.(d) de [Mi80]) et il s'ensuit que dans ce cas le morphisme

$$\phi : \pi^* D(\bar{P}) \longrightarrow \text{Tors}(X, G_X)$$

est un isomorphisme de gerbes. Donc la gerbe $\pi^* D(\bar{P})$ est neutre. Par suite, la gerbe $x^* \pi^* D(\bar{P})$ est neutre. Comme $\pi \circ x = \text{id}_{\text{Spec } k}$, on en déduit que la gerbe $D(\bar{P})$, qui est équivalente à la gerbe $x^* \pi^* D(\bar{P})$, est elle aussi neutre, ce qui achève la preuve.

□

3.4 Remarques

3.4.1 Problèmes de représentabilité

Il ressort des deux chapitres précédents qu'il existe des obstacles de taille à ce que l'on puisse généraliser au cas non-abélien la suite à 5 termes déduite de la suite spectrale de Leray. Le premier, et non des moindres, est (pour citer [Gi71]) "qu'il n'existe pas de notion raisonnable pour l'image directe d'un lien".

On ne peut en général pas dire grand chose du lien de la gerbe $D(\bar{P})$, même lorsque le k -groupe G initial jouit des meilleures propriétés dont l'on puisse rêver. Il serait par exemple tentant de croire que si G est un k -groupe réductif (*e.g.* $GL_n(k)$) alors le lien de la gerbe des modèles d'un \bar{G}_X -torseur de corps des modules k est localement représentable par une k -forme de G . Il n'en est rien en général, et voici (me semble-t-il) une explication possible: même si l'on connaît parfaitement la structure des k -groupes réductifs (et plus généralement des schémas en groupes réductifs, grâce à [Dem64]), on ne peut pas arriver à avoir des informations exploitablees sur lien $D(\bar{P})$, attendu que ce k -lien provient dans un certain sens de formes intérieures sur X du schéma en groupes G_X . Grossièrement, le passage de X à k brouille toutes les pistes.

3.4.2 La condition corps des modules et le champ $\pi_* \text{Tors}(X, G_X)$

Considérons de nouveau un corps k de caractéristique nulle, $\pi : X \rightarrow \text{Spec } k$ un k -schéma, un k -groupe algébrique G et un \bar{G}_X -torseur $\bar{P} \rightarrow \bar{X}$, que l'on ne suppose pas pour l'instant de corps des modules k , autrement dit: $[\bar{P}] \in H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)$.

- Si \bar{P} est de corps des modules k : on peut lui associer sa gerbe des modèles $D(\bar{P})$. C'est une k -gerbe. On dispose de plus d'un monomorphisme de k -champs évident (que nous avions déjà évoqué dans la preuve du lemme 3.1.2):

$$\epsilon : D(\bar{P}) \longrightarrow \pi_* \text{Tors}(X, G_X)$$

dont la composante au-dessus d'un ouvert étale ($\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } k$) est le foncteur:

$$\epsilon_L : D(\bar{P})(L) \longrightarrow \text{Tors}(X_L, G_{X_L})$$

$$P_L \longmapsto P_L$$

dont la définition est cohérente, puisqu'un objet de cette gerbe au-dessus de $\text{Spec } L$ est en particulier un G_{X_L} -torseur sur X_L . Dans un certain sens (que nous n'allons pas tarder à préciser) le k -champ $\pi_*\text{Tors}(X, G_X)$ "contient" les gerbes des modèles de tous les \bar{G}_X -torseurs sur \bar{X} de corps des modules k ;

- Si \bar{P} n'est pas de corps des modules k : on peut toujours définir la k -catégorie fibrée en groupoïdes $D(\bar{P})$ en prenant comme catégorie fibre au-dessus d'un ouvert étale ($\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } k$) le groupoïde dont:

- **les objets** sont toujours les G_{X_L} -torseurs P_L sur X_L tels qu'il existe un automorphisme $\sigma \in \Gamma$ et un isomorphisme de \bar{G}_X -torseurs sur \bar{X} :

$${}^\sigma \bar{P} \xrightarrow{\sim} P_L \otimes_L \bar{k}$$

- **les flèches** sont les isomorphismes de G_{X_L} -torseurs sur X_L .

$D(\bar{P})$ est toujours un k -champ. Il est même localement non-vide, puisque comme (cf. [SGA4-VII] 5.7 et 5.14):

$$H^1(\bar{X}, \bar{G}_X) = \varinjlim_L H^1(X_L, G_{X_L})$$

la limite directe étant prise sur les extensions étales de k , il existe une extension étale L' et un élément $[P_{L'}]$ de $H^1(X_{L'}, G_{X_{L'}})$ tels que: $P_{L'} \otimes_{L'} \bar{k} \approx \bar{P}$.

Mais ce champ $D(\bar{P})$ n'est pas une k -gerbe, car deux objets ne sont pas localement isomorphes, du fait que pour $\sigma \in \Gamma$, les torseurs \bar{P} et ${}^\sigma \bar{P}$ ne sont pas en général isomorphes. Cependant, il est possible d'associer à \bar{P} une gerbe au-dessus de son corps des modules $k_{\bar{P}}$, ce dernier étant l'intersection de toutes les extensions étales L de k telles que:⁷

$${}^\tau \bar{P} \approx \bar{P}, \quad \forall \tau \in \text{Gal}(\bar{k}/L).$$

On peut traduire de deux manières les remarques ci-dessus:

- dans le langage de Giraud (cf. [Gi66] et [Gi71]), la première remarque signifie que la gerbe $D(\bar{P})$ est une section globale du faisceau des sous-gerbes maximales de $\pi_*\text{Tors}(X, G_X)$, et la seconde signifie que la gerbe $D(\bar{P})$ est une section au-dessus de l'ouvert étale ($\text{Spec } k_{\bar{P}} \rightarrow \text{Spec } k$) de ce faisceau. Ces remarques sont contenues dans l'énoncé suivant:

Propriété 3.4.1 (Lemme V.3.1.5 de [Gi71]). Soient $f : E' \rightarrow E$ un morphisme de sites et A un faisceau de groupes sur E' . On a un isomorphisme canonique d'ensembles sur E entre $R^1 f_* A$ et le faisceau des sous-gerbes maximales du champ $f_* \text{Tors}(E', A)$.

⁷Pour donner une interprétation topologique du corps des modules, disons que l'ouvert étale ($\text{Spec } k_{\bar{P}} \rightarrow \text{Spec } k$) est le plus grand ouvert étale sur lequel on peut associer une donnée de recollement à \bar{P} .

En appliquant ce lemme à la présente situation, *i.e.* en prenant pour E (*resp.* E') le site étale de k (*resp.* de X), pour f le morphisme de sites induit par le morphisme structural π et pour A le faisceau G_X , on obtient ainsi:

Lemme 3.4.2. *On a un isomorphisme canonique d'ensembles sur k entre les classes d'isomorphie de \bar{G}_X -torseurs sur \bar{X} et le faisceau des sous-gerbes maximales du champ $\pi_*\text{Tors}(X, G_X)$.*

En effet, on peut associer à un G_X -torseur sur \bar{X} une $k_{\bar{P}}$ -gerbe, et celle-ci est une sous-gerbe maximale du $k_{\bar{P}}$ -champ $\pi_*\text{Tors}(X, G_X) \otimes_k k_{\bar{P}}$, *i.e.* une section au-dessus de $k_{\bar{P}}$ du faisceau des sous-gerbes maximales de $\pi_*\text{Tors}(X, G_X)$;

- dans le langage plus moderne de Laumon et Moret-Bailly (*cf.* [LMB00]), on traduit la première remarque en disant que \bar{P} (*resp.* $[\bar{P}]$) est un point k -rationnel⁸ du champ $\pi_*\text{Tors}(X, G_X)$ (*resp.* une section globale du faisceau étale grossier⁹ $R^1\pi_*G_X$ associé à ce champ), et la seconde en disant que \bar{P} (*resp.* $[\bar{P}]$) est un point à valeurs dans $\text{Spec } k_{\bar{P}}$ du champ $\pi_*\text{Tors}(X, G_X)$ (*resp.* une section au-dessus de $k_{\bar{P}}$ du faisceau grossier $R^1\pi_*G_X$). Dans les deux cas, la gerbe $D(\bar{P})$ est la gerbe résiduelle en le point \bar{P} du champ $\pi_*\text{Tors}(X, G_X)$. L'analogie du lemme V.3.1.5 de [Gi71] est fourni par l'énoncé ci-dessous:

Propriété 3.4.3 (Corollaire 11.4 de [LMB00]). *Soient S un schéma, \mathfrak{X} un S -champ algébrique noethérien, et ξ un point du S -champ algébrique \mathfrak{X} . L'application qui à ξ associe \mathcal{G}_{ξ} (la gerbe résiduelle du champ \mathfrak{X} au point ξ) définit une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphie de couples*

$$\left(\mathcal{G} \xrightarrow{A} \text{Spec } K, \mathcal{G} \xrightarrow{I} \mathfrak{X} \right)$$

où \mathcal{G} est une gerbe fppf sur un S -corps K et où $\mathcal{G} \xrightarrow{I} \mathfrak{X}$ est un monomorphisme de S -champs.

Nous utiliserons cette propriété (où, avec nos hypothèses, on peut remplacer “fppf” par “étale”) avec $S = \text{Spec } k$ et $\mathfrak{X} = \pi_*\text{Tors}(X, G_X)$. A tout \bar{G}_X -torseur sur \bar{X} , on peut associer sa gerbe des modèles $D(\bar{P})$; comme on l'a vu plus haut, c'est une $k_{\bar{P}}$ -gerbe ($k_{\bar{P}}$ étant le corps des modules de \bar{P}), que l'on peut toujours “plonger” naturellement dans le k -champ $\pi_*\text{Tors}(X, G_X)$ (essentiellement parce qu'un modèle de \bar{P} au-dessus d'une extension étale L est un G_{X_L} -torseur sur X_L , donc en particulier un objet du groupoïde fibre $\pi_*\text{Tors}(X, G_X)(L)$). Alors le morphisme A du corollaire 11.4 de [LMB00] n'est autre que le morphisme structural:

$$D(\bar{P}) \longrightarrow \text{Spec } k_{\bar{P}}$$

⁸Au sens de la définition 5.2 de [LMB00].

⁹Nous renvoyons à [LMB00] 3.19 ou à la preuve du lemme 3.3.2.2 pour la définition de faisceau grossier attaché à un champ.

de la $k_{\bar{P}}$ -gerbe des modèles, et le monomorphisme I est le morphisme naturel:

$$D(\bar{P}) \longrightarrow \pi_* \mathrm{Tors}(X, G_X)$$

Achevons ces considérations par un énoncé (trivial) faisant le lien entre les deux points de vue que l'on vient de comparer:

Lemme 3.4.2.1. *Avec les notations adoptées tout au long de cette section, le faisceau $R^1\pi_*G_X$ est le faisceau grossier (sur le site étale de k) attaché au k -champ $\pi_*\mathrm{Tors}(X, G_X)$.*

PREUVE: le faisceau grossier attaché au k -champ $\pi_*\mathrm{Tors}(X, G_X)$ est le faisceau associé au préfaisceau:

$$(\mathrm{Spec} L \rightarrow \mathrm{Spec} k) \rightsquigarrow \{\text{classes d'isomorphie d'objets de } \pi_*\mathrm{Tors}(X, G_X)(L)\}$$

soit encore:

$$(\mathrm{Spec} L \rightarrow \mathrm{Spec} k) \rightsquigarrow \{\text{classes d'isomorphie d'objets de } \mathrm{Tors}(X_L, G_{X_L})\}$$

C'est donc le faisceau associé au préfaisceau:

$$(\mathrm{Spec} L \rightarrow \mathrm{Spec} k) \rightsquigarrow H^1(X_L, G_{X_L})$$

Ce qui est exactement la définition du faisceau $R^1\pi_*G_X$.

□

Chapter 4

Obstruction de Brauer-Manin des gerbes

Cette section est le fruit d'un travail en commun avec Jean-Claude Douai et Michel Emsalem. A peu de choses près, le contenu de cette section est celui de notre texte, disponible sur le serveur “arxiv”, à l'adresse suivante:

arxiv:math.AG/0303231

Nous montrons ici comment associer à une gerbe définie sur un corps de nombres une obstruction de Brauer-Manin mesurant, comme dans le cas des variétés, le défaut d'existence d'une section globale. La motivation est la suivante: soient k un corps de nombres, et V un k -espace homogène sous SL_n avec isotropie H . On peut lui associer la gerbe $\mathcal{G}(V) = \mathcal{G}$ de ses trivialisations, *i.e.* la gerbe qui mesure l'obstruction à ce que V soit dominé par un SL_n -torseur sur k , autrement dit qu'il soit trivial. D'autre part, si V a des points partout localement, on peut lui associer son obstruction de Brauer-Manin $m_{\mathcal{H}}(V)$. Si cette dernière est non-nulle, V n'a pas de point k -rationnel.

Or plusieurs espaces homogènes peuvent avoir la même gerbe \mathcal{G} des trivialisations. Dans un souci d'économie, on veut définir une obstruction de Brauer-Manin de \mathcal{G} , dont la non-nullité est une obstruction à ce que \mathcal{G} soit neutre, et par conséquent une obstruction à ce que chacun des espaces homogènes ayant \mathcal{G} pour gerbe des trivialisations ait un point k -rationnel.

Une fois de plus, ce raisonnement est inspiré de la théorie des revêtements. Plus explicitement, si k est un corps de nombres, \bar{f} un \bar{k} -revêtement de corps des modules k , et $\mathcal{G}(\bar{f})$ la k -gerbe associée à \bar{f} (*i.e.* la gerbe des modèles de \bar{f}). Dans [DDM01], Dèbes, Douai et Moret-Bailly ont introduit la notion de variété de descente associée à \bar{f} . Si V est une telle variété, la gerbe $\mathcal{G}(\bar{f})$ est alors isomorphe au champ quotient $[V/GL_n]$, pour un n idoine. En fait, il existe une infinité possible de telles variétés de descente V correspondant à une infinité de choix possibles pour l'entier n . Soit maintenant K une extension de k : tout K -point de V définit un K -point de \mathcal{G} , et réciproquement tout K -point de \mathcal{G} se relève en un K -point de V . Il s'ensuit que si V et V' sont deux variétés de descente correspondant à la même k -gerbe \mathcal{G} , alors:

$$V(K) \neq \emptyset \Leftrightarrow V'(K) \neq \emptyset$$

Forts de ces observations, on veut comparer les invariants de V et V' ; ils ne dépendent que de \mathcal{G} . En particulier:

$$\mathrm{Br}_a V \approx \mathrm{Br}_a V' \approx \mathrm{Br}_a \mathcal{G},$$

et

$$\mathrm{Pic} \, V \approx \mathrm{Pic} \, V' \approx \mathrm{Pic} \, \mathcal{G}.$$

Ceci nous amène à calculer l'invariant de Brauer-Manin $m_{\mathcal{H}}(V)$ de V , à introduire l'invariant de Brauer-Manin $m_{\mathcal{H}}(\mathcal{G})$ de la gerbe \mathcal{G} , puis à prouver que $m_{\mathcal{H}}(V) = m_{\mathcal{H}}(\mathcal{G})$, l'intérêt de cette égalité étant sa validité pour toute variété de descente V correspondant à \mathcal{G} (plus loin, nous dirons que V est une *présentation* de \mathcal{G}).

Tout ce qui précède s'étend aux k -gerbes quelconques localement liées par un groupe fini (pour des raisons évidentes, de telles gerbes seront appelées des *gerbes de Deligne-Mumford*). L'application $m_{\mathcal{H}}$ qui à une classe de k -gerbes $[\mathcal{G}]$ associe l'invariant de Brauer-Manin d'un de ses représentants peut alors être vue comme une généralisation de la dualité de Tate-Poitou dans le cas abélien (nous renvoyons au théorème 4.4.1 pour un énoncé précis); cet invariant vit dans le groupe de Tate-Shafarevich:

$$\mathrm{III}^1 \left(k, \widehat{H} \right)^D$$

où \widehat{H} est le groupe d'automorphismes d'un objet de \mathcal{G} ($\mathrm{Spec} \, \bar{k}$).

4.1 Rappels

4.1.1 Calcul de $\mathrm{Br}_a V$ dans le cas où V est un espace homogène de SL_n avec isotropie H

Dans tout ce chapitre, k désigne un corps de nombres et Ω_k l'ensemble de ses places. Soit V une k -variété¹ algébrique lisse, géométriquement irréductible. De la suite spectrale:

$$H^p \left(k, H_{\text{ét}}^q \left(\bar{V}, \mathbb{G}_m \right) \right) \Longrightarrow H_{\text{ét}}^{p+q} \left(V, \mathbb{G}_m \right)$$

on déduit la suite exacte longue:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^1 \left(k, \bar{k}[V]^* \right) & \longrightarrow & \mathrm{Pic} \, V & \longrightarrow & \mathrm{Pic} \, \bar{V}^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} \longrightarrow H^2 \left(k, \bar{k}[V]^* \right) \\ & & & & & & \underbrace{\hspace{10em}}_{\longrightarrow \mathrm{Br}_1 V} \\ & & & & & & H^1 \left(k, \mathrm{Pic} \, \bar{V} \right) \longrightarrow H^3 \left(k, \bar{k}[V]^* \right) \end{array} \quad (4.1)$$

Posons:

$$U \left(\bar{V} \right) = \frac{\bar{k}[V]^*}{\bar{k}^*}$$

La suite exacte (4.1) fournit une nouvelle suite exacte:

$$\mathrm{Pic} \, \bar{V}^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} \rightarrow H^2 \left(k, U \left(\bar{V} \right) \right) \rightarrow \mathrm{Br}_a V \rightarrow H^1 \left(k, \mathrm{Pic} \, \bar{V} \right) \rightarrow H^3 \left(k, U \left(\bar{V} \right) \right) \quad (4.2)$$

Supposons que V est un k -espace homogène sous un k -groupe algébrique semi-simple simplement connexe \widetilde{G} (e.g. SL_n) avec isotropie un groupe fini, i.e.: il existe un \bar{k} -groupe fini \bar{H} tel que:

$$\bar{V} = \widetilde{G} \left(\bar{k} \right) / \bar{H}$$

¹Par k -variété, on entend ici k -schéma séparé de type fini.

Nous avons alors la suite exacte:

$$0 \longrightarrow U(\bar{V}) \longrightarrow U(\tilde{G}(\bar{k}))$$

provenant de la fibration $\tilde{G}(\bar{k}) \rightarrow \bar{V}$. Or on sait (d'après le lemme 6.5 (iii) de [Sa81]) que:

$$U(\tilde{G}(\bar{k})) = \widehat{\tilde{G}(\bar{k})} = 0$$

La suite exacte (4.2) se réduit alors à l'isomorphisme:

$$\mathrm{Br}_a V \xrightarrow{\sim} H^1(k, \mathrm{Pic} \bar{V})$$

Remarque 4.1.1.1. Notons au passage que cet isomorphisme est valable plus généralement lorsque V est une variété algébrique propre (*e.g.* projective) définie sur un corps de nombres k . Car dans cette situation, d'une part le groupe $H^3(k, \mathbb{G}_m)$ est nul, et d'autre part $\bar{k}[V]^*$ se réduit évidemment aux constantes.

Par exemple, le groupe $\mathrm{Br}_a V$ (donc *a fortiori* $\mathrm{B}(V)$) est nul lorsque V est une k -variété de Severi-Brauer, ou une k -variété projective lisse qui est une intersection complète de dimension ≥ 3 (*cf.* la proposition 2.1.13).

4.1.2 Exemples

- (i) Si $H = 0$, alors $\bar{V} \approx \tilde{G}(\bar{k})$, et $\mathrm{Pic} \bar{V} = 0$ (car $\mathrm{Pic} \tilde{G}(\bar{k}) = 0$ par le corollaire 4.5 de [FI73]).
- (ii) Si $H = \mu$ est un k -sous-groupe central de \tilde{G} , alors $V = G = \tilde{G}/\mu$ est semi-simple, et $\mathrm{Pic} \tilde{G}(\bar{k}) = \widehat{\mu(\bar{k})}$ (par le corollaire 4.6 de [FI73]), d'où:

$$\mathrm{Br}_a V = \mathrm{Br}_a G = H^1(\bar{k}/k, \widehat{\mu(\bar{k})}) = H^1(k, \widehat{\mu})$$

$\mathrm{Pic} G$ et $\mathrm{Br}_a G$ sont justifiables de la philosophie de Kottwitz: ce sont des invariants des groupes semi-simples qui sont nuls lorsque $G = \tilde{G}$ est simplement connexe. Ils peuvent donc s'exprimer en fonction du centre $Z(^L G)$ du dual de Langlands de G [Ko84].

Cette remarque vaut encore pour:

$$\mathrm{B}(G) = \ker \left\{ \mathrm{Br}_a G \rightarrow \prod_{v \in \Omega_k} \mathrm{Br}_a G_v \right\}$$

- (iii) Prenons pour V un k -tore T . Alors (*cf.* le lemme 6.9 de [Sa81]):

$$\mathrm{Pic} \bar{T} = H^1(k, \widehat{T}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Br}_a T = H^2(k, \widehat{T})$$

En outre:

$$\mathrm{B}(T) \approx \mathrm{III}^2(k, \widehat{T}) \approx \mathrm{III}^1(k, \widehat{T})^D$$

le deuxième isomorphisme étant fourni par la dualité de Kottwitz [Ko84] qui étend aux tores celle de Tate-Poitou.

(iv) Considérons maintenant un k -espace homogène de SL_n avec isotropie un groupe fini; on suppose donc qu'il existe un groupe fini \bar{H} tel que:

$$\bar{V} \approx SL_{n,\bar{k}}/\bar{H}$$

Alors $\text{Pic } \bar{V} \approx \widehat{\bar{H}}$ (*cf.* [BK97]). On dispose en effet de la \bar{k} -fibration:

$$SL_{n,\bar{k}} \longrightarrow SL_{n,\bar{k}}/\bar{H}$$

à laquelle est attachée la suite spectrale de Hochschild-Serre:

$$E_2^{p,q} = H^p(\bar{H}, H^q(SL_n, \mathbb{G}_m)) \implies H_{\text{ét}}^{p+q}(\bar{V}, \mathbb{G}_m) = E^{p+q}$$

Dans cette dernière, le terme $E_2^{0,1}$ est nul², donc:

$$H_{\text{ét}}^1(\bar{V}, \mathbb{G}_m) = H^1(\bar{H}, \mathbb{G}_m) = \text{Hom}(\bar{H}, \mathbb{G}_m) = \widehat{\bar{H}}$$

D'où la:

Proposition 4.1.2.1. *Soit V un k -espace homogène d'un groupe semi-simple simplement connexe \widetilde{G} avec isotropie un groupe fini \bar{H} . Alors d'après [BK97]:*

$$\text{Br}_a V \approx H^1(k, \widehat{\bar{H}})$$

En outre, si k est un corps de nombres, et si on suppose que V a des points partout localement (i.e. si $V_v = V \otimes_k k_v$ a un k_v -point, pour toute place v de k), alors:

$$\mathsf{B}(V) = \ker \left\{ \text{Br}_a V \rightarrow \prod_{v \in \Omega_k} \text{Br}_a V_v \right\} \approx \text{III}^1(k, \widehat{\bar{H}})$$

Corollaire 4.1.2.2. *Sous les hypothèses et notations de la proposition précédente, si \bar{H} est sans caractère, alors $\text{Br}_a V = \mathsf{B}(V) = 0$.*

Exemple 4.1.2.3. Le corollaire s'applique donc si $\bar{H} = SL(2, \mathbb{F}_p)$ avec $p \neq 2, 3$, ou encore si $\bar{H} = \mathcal{A}_n$ avec $n \geq 5$. Plus généralement, il faut et il suffit que \bar{H} soit égal à son groupe dérivé.

4.2 Interprétation comme champ quotient des k -gerbes localement liées par un groupe algébrique fini

On s'intéresse donc dans cette section aux k -gerbes qui sont des champs de Deligne-Mumford [LMB00]. Rappelons d'abord la proposition 5.1 de [DDM01]:

²En effet, $\text{Pic } SL_n = H^1(SL_{n,\bar{k}}, \mathbb{G}_m) = \text{Hom}(\Pi_1(SL_n), \mathbb{G}_m) = 0$ puisque SL_n est simplement connexe.

Proposition 4.2.1. *Soient k un corps, et \mathcal{G} une k -gerbe (pour la topologie étale) qui est un champ de Deligne-Mumford. Alors:*

1. *Il existe une k -algèbre L avec action à gauche d'un groupe fini Γ admettant k comme anneau des invariants telle que \mathcal{G} soit isomorphe au champ quotient $[\mathrm{Spec} L/\Gamma]$;*
2. *Il existe un k -schéma affine V , un entier $n \geq 0$, une action à droite de $GL_{n,k}$ sur V et un 1-morphisme $\pi : V \rightarrow \mathcal{G}$ avec les propriétés suivantes:*
 - (i) *π induit un isomorphisme du champ quotient $[V/GL_{n,k}]$ vers \mathcal{G} ;*
 - (ii) *V est lisse et géométriquement irréductible;*
 - (iii) *l'action de $GL_{n,k}$ sur V est transitive et à stabilisateurs finis;*
 - (iv) *pour chaque extension K de k , chaque objet de $\mathcal{G}(K)$ se relève en un point de $V(K)$ via π .*

En particulier, à cause de (iii) et (iv), si K est une extension de k telle que $\mathcal{G}(K) \neq \emptyset$,³ la K -variété $V \otimes_k K$ est isomorphe au quotient de $GL_{n,K}$ par un groupe fini.

Remarques 4.2.2.

(a) Dans la remarque 5.2(b) de [DDM01], il est montré que l'on peut en fait prendre pour k -algèbre L une extension galoisienne finie de k , auquel cas Γ est l'ensemble des couples (σ, φ) où $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/k)$ et $\varphi : \sigma x \xrightarrow{\sim} x$ est un isomorphisme dans la catégorie (en fait, le groupoïde) $\mathcal{G}(L)$. Il y a une structure de groupe sur Γ pour laquelle la projection naturelle $\Gamma \rightarrow \mathrm{Gal}(L/k)$ est un morphisme surjectif, et le noyau $H = H(L)$ est le stabilisateur fini dont l'existence est donnée par le (iii) de la proposition 4.2.1.

A la gerbe \mathcal{G} est aussi associée une extension (cf. [Gi71], [Sp66])

$$\mathcal{G} \rightsquigarrow (\mathcal{E}) : 1 \rightarrow H \rightarrow \Gamma \rightarrow \mathrm{Gal}(L/k) \rightarrow 1$$

définissant une action extérieure \mathcal{L}_H de $\mathrm{Gal}(L/k)$ sur $H = H(L)$, et une classe de 2-cohomologie notée $[\mathcal{G}]$ dans $H^2(L/k, \mathcal{L}_H) \hookrightarrow H^2(k, \mathcal{L}_H)$.

(b) On obtient les mêmes conclusions en remplaçant dans la proposition 4.2.1 GL_n par SL_n (cf. remarque 5.2(c) de [DDM01]).

Une construction fondamentale

Partons de l'extension (\mathcal{E}) de la remarque précédente:

$$(\mathcal{E}) : 1 \rightarrow H \rightarrow \Gamma \rightarrow \mathrm{Gal}(L/k) \rightarrow 1$$

³Ce qui signifie que l'ensemble d'objets $Ob(\mathcal{G}(K))$ de la catégorie fibre de \mathcal{G} au-dessus de $\mathrm{Spec} K$ est non-vide; par la suite, nous fairons systématiquement cet abus de langage.

Γ est un groupe fini; on peut donc le plonger dans SL_n pour un certain n , ce qui conduit au diagramme suivant:

$$(D) : \begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & \Gamma & \longrightarrow & \text{Gal}(L/k) \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & SL_{n,\bar{k}} & \dashrightarrow & SL_{n,\bar{k}}/H \longrightarrow 1 \end{array}$$

$SL_{n,\bar{k}}/H$ n'est pas un groupe, puisque H n'est pas nécessairement normal dans $SL_{n,\bar{k}}$. C'est seulement un k -espace homogène (toujours au sens de Springer [Sp66]), d'où la présence des pointillés dans le diagramme précédent. La flèche verticale

$$\begin{array}{c} \text{Gal}(L/k) \\ | \\ | \\ \text{SL}_{n,\bar{k}}/H \end{array}$$

donne lieu à un 1-cocycle dans $Z^1(L/k; SL_n, H)$, qui représente précisément la classe du k -espace homogène V du (2) de la proposition 4.2.1. La k -gerbe $\mathcal{G} \approx [V/SL_n]$ (associée à (\mathcal{E})) s'interprète alors comme la gerbe des relèvements du k -espace homogène V à SL_n . En d'autres termes, $[\mathcal{G}]$ est l'image de V par le cobord (*cf.* [Sp66], [Do76])

$$\delta^1 : Z^1(L/k; SL_n, H) \longrightarrow H^2(k, \mathcal{L}_H)$$

Dans la suite, nous appellerons **présentation de \mathcal{G}** $[V/SL_n]$ un couple (V, π) comme dans la proposition 4.2.1.

Remarque 4.2.3. La proposition 4.2.1 traduit en particulier le fait que les deux groupes de Brauer d'un schéma (cohomologique et "Azumaya") coïncident lorsque ce schéma est un corps. En effet, si $\mathcal{G} \in H^2(k, \mathbb{G}_m)$, alors il existe un n tel que $\mathcal{G} \in H^2(k, \mu_n)$, puisque le groupe de Brauer d'un corps, et plus généralement d'un schéma régulier [Gr68], est de torsion. Par conséquent, \mathcal{G} est un champ de Deligne-Mumford, et il existe un entier n' et un k -espace homogène V de $SL_{n'}$ avec isotropie μ_n tels que

$$\mathcal{G} \approx [V/SL_{n'}]$$

Remarquons que l'entier n' peut être différent de n , et c'est en particulier le cas pour le corps k_M construit par Merkurjev dans son article sur la conjecture de Kaplansky [Me91]: il existe un élément de $H^2(k_M, \mu_2)$ qui ne provient pas d'un élément de $H^1(k_M, PGL_2) = H^1(k_M; SL_2, \mu_2)$ (mais qui est atteint par un élément de $H^1(k_M, PGL_4)$).

Cependant, l'espace homogène V n'est autre que la variété de Severi-Brauer pré-image de \mathcal{G} par le morphisme naturel

$$\text{Br}_{Az}k \longrightarrow H^2(k, \mathbb{G}_m)$$

et on retrouve ainsi le point de vue de [EHKV01].

4.3 Invariant de Brauer-Manin d'une k -gerbe localement liée par un groupe fini

Les k -champs algébriques (en particulier les k -gerbes qui sont des champs de Deligne-Mumford) sont des généralisations de la notion de schéma. Par suite, il est tout-à-fait naturel de définir l'obstruction de Brauer-Manin d'une k -gerbe de manière analogue à celle d'un k -schéma.

Soit donc \mathcal{G} une k -gerbe, qui est un champ de Deligne-Mumford. Le site étale de \mathcal{G} est défini au chapitre 12 de [LMB00]. Le groupe de Brauer $\text{Br } \mathcal{G} = H_{\text{ét}}^2(\mathcal{G}, \mathbb{G}_m)$ est défini dans [SGA4-V] (où, d'une manière plus générale, la cohomologie d'un topos localement annelé est définie). Il existe une suite spectrale (cf. [SGA4-V], prop. 5.3):

$$E_2^{p,q} = H^p(k, H_{\text{ét}}^q(\mathcal{G}, \mathbb{G}_m)) \implies H_{\text{ét}}^{p+q}(\mathcal{G}, \mathbb{G}_m) = E^{p+q}$$

qui permet de définir $\text{Br}^{cst}\mathcal{G}$, $\text{Br}^{alg}\mathcal{G}$ et $\text{Br}_a\mathcal{G}$ comme pour les variétés. Plus précisément:

$$\begin{cases} \text{Br}^{cst}\mathcal{G} = \text{im } \{E_2^{2,0} = \text{Br } k \longrightarrow \text{Br } \mathcal{G} = E^2\} \\ \text{Br}^{alg}\mathcal{G} = \ker \{E^2 = \text{Br}\mathcal{G} \longrightarrow \text{Br}\bar{\mathcal{G}} = E_2^{0,2}\} \\ \text{Br}_a\mathcal{G} = \frac{\text{Br}^{alg}\mathcal{G}}{\text{Br}^{cst}\mathcal{G}} \end{cases}$$

Soit (V, π) une présentation de \mathcal{G} (d'après nos hypothèses, on a donc $\mathcal{G} \approx [V/SL_n]$). Posons:

$$U(\bar{\mathcal{G}}) = \frac{\bar{k}[\mathcal{G}]^*}{\bar{k}^*}$$

On a:

$$U(\bar{\mathcal{G}}) \subset U(\bar{V}) \subset U(SL_{n,\bar{k}}) = \widehat{SL_{n,\bar{k}}} = 0$$

L'analogue de la suite exacte (2) associée à la suite spectrale précédente implique alors:

$$\begin{aligned} \text{Br}_a\mathcal{G} &\approx H^1(k, \text{Pic } \bar{\mathcal{G}}) \\ &\approx H^1(k, \text{Hom}(\Pi_1(\bar{\mathcal{G}}), \mathbb{G}_m)) \\ &\approx H^1(k, \text{Hom}(\bar{H}, \mathbb{G}_m)) \end{aligned}$$

car il est bien connu que $\Pi_1(\bar{\mathcal{G}}) = \bar{H}$ (cf. [No02]), et finalement:

$$\text{Br}_a\mathcal{G} \approx H^1(k, \widehat{\bar{H}}) \tag{4.3}$$

Si K est un corps qui est une extension quelconque de k , nous pouvons définir un accouplement:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(K) \times \text{Br } \mathcal{G} & \rightarrow & \text{Br } K \\ (x, b) & \longmapsto & b(x) \end{array}$$

où l'image $b(x)$ peut être interprétée de différentes façons (\mathcal{B} désigne ci-dessous un représentant de b):

- (i) $b(x)$ est la gerbe résiduelle de \mathcal{B} au point x du champ algébrique $\mathcal{G} = [V/SL_n]$;

(ii) comme dans la section 2.3, x peut être vu comme une section au dessus de $\text{Spec } K$ du (1-)morphisme structural $\mathcal{G} \rightarrow \text{Spec } k$; autrement dit, c'est un (1-)morphisme rendant commutatif le diagramme (de morphismes de champs) suivant:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{G} & \\ x \nearrow & \downarrow & \\ \text{Spec } K & \longrightarrow & \text{Spec } k \end{array}$$

\mathcal{B} étant une gerbe sur \mathcal{G} , on peut considérer la gerbe image inverse $x^*\mathcal{B}$ de \mathcal{B} par le morphisme x ; la gerbe $x^*\mathcal{B}$ ainsi obtenue correspond exactement à $b(x)$; elle est obtenue par pull-back à partir de x et de \mathcal{B} :

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{B} & \\ x^* \mathcal{B} \dashleftarrow & \downarrow & \mathcal{G} \\ \downarrow & x \nearrow & \downarrow \\ \text{Spec } K & \longrightarrow & \text{Spec } k \end{array}$$

De plus, si H abélien, toute K -section de la gerbe \mathcal{G} (*i.e.* tout objet de $\mathcal{G}(K)$) est un H -torseur sur $\text{Spec } K$ (\mathcal{G} est par définition localement équivalente à la gerbe $\text{Tors } H$; l'existence d'une K -section implique que $\mathcal{G}|_K$ est équivalente à la gerbe des H -torseurs sur K). Si on suppose que K est un corps local, on obtient alors l'énoncé suivant:

Proposition 4.3.1 (Cas local). *Soient K un corps local, \mathcal{G} une K -gerbe liée par un groupe abélien fini H et (V, π) une présentation de \mathcal{G} . Le diagramme suivant est commutatif:*

$$\begin{array}{ccc} (\text{Acc.1}) & V(K) & \times & \text{Br}_a V \\ \downarrow & & & \uparrow \approx \\ (\text{Acc.2}) & \mathcal{G}(K) & \times & \text{Br}_a \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ \downarrow & & & \uparrow \approx \\ (\text{Acc.3}) & H^1(K, \bar{H}) & \times & H^1(K, \widehat{\bar{H}}) \end{array}$$

où:

- l'accouplement (Acc.1) : $V(K) \times \text{Br}_a V \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est défini comme suit: à un point x de $V(K)$, et à une classe b dans $\text{Br}_a V$, on associe:

$$\langle x, b \rangle = [s_x(b)]_x$$

s_x désignant la section⁴ induite par x de la projection canonique p (*cf.* [BK00]):

$$\text{Br}_1 X \xrightarrow[p]{} \text{Br}_a X$$

⁴En effet, l'existence d'un point K -rationnel entraîne que la suite:

$$0 \longrightarrow \text{Br } K \longrightarrow \text{Br}_1 V \longrightarrow \text{Br}_a V \longrightarrow 0$$

- l'accouplement (Acc.2) : $\mathcal{G}(K) \times \text{Br}_a \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est défini de la même manière que (Acc.1);
- l'accouplement (Acc.3) : $H^1(K, \bar{H}) \times H^1(K, \widehat{\bar{H}}) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est l'accouplement de Tate pour les corps locaux.

k étant un corps de nombres, nous pouvons définir pour toute place v de k l'accouplement:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(k_v) \times \text{Br}_1 \mathcal{G} &\longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ (x, b) &\longmapsto \text{inv}_v(b(x)) \end{aligned}$$

où comme d'habitude inv_v est l'invariant donné par la théorie du corps de classes, et $b(x)$ est la classe dans $\text{Br } k_v$ de \mathcal{B}_x , où \mathcal{B} est un représentant de b . Supposons maintenant que $\mathcal{G}(k_v)$ soit non-vide pour toute place v de k , et restreignons nous au sous-groupe $\text{B}(\mathcal{G})$ de $\text{Br}_a \mathcal{G}$ défini par:

$$\text{B}(\mathcal{G}) = \ker \left\{ \text{Br}_a \mathcal{G} \longrightarrow \prod_{v \in \Omega_k} \text{Br}_a \mathcal{G}_{|k_v} \right\}$$

Nous définissons ainsi un accouplement:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \prod_{v \in \Omega_k} \mathcal{G}(k_v) \times \text{B}(\mathcal{G}) &\longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ ((x_v)_v, b) &\longmapsto \sum_{v \in \Omega_k} \text{inv}_v(\tilde{b}(x_v)) \end{aligned}$$

où \tilde{b} est un relevé de b dans $\text{Br}_1 \mathcal{G}$. Par analogie avec la définition usuelle de cet accouplement (*cf.* section 2.3), $\langle (x_v)_v, b \rangle$ ne dépend pas de $(x_v)_v$, et $\langle (x_v)_v, b \rangle \neq 0$ est une obstruction à l'existence d'une section k -rationnelle de $\text{Spec } k$ (*i.e.* d'un objet de la catégorie fibre $\mathcal{G}(k)$). Nous obtenons de cette façon un élément bien défini:

$$m_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}) \in \text{B}(\mathcal{G})^D = \text{Hom}(\text{B}(\mathcal{G}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \text{Hom}\left(\text{III}^1(k, \widehat{\bar{H}}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right)$$

puisque: $\text{B}(\mathcal{G}) \approx \text{III}^1(k, \widehat{\bar{H}})$ (c'est une conséquence immédiate de l'isomorphisme (4.3)).

Proposition 4.3.2 (Cas global). Soient k un corps de nombres et \mathcal{G} une k -gerbe. Pour toute présentation (V, π) de \mathcal{G} :

$$\text{B}(V) \xrightarrow{\sim} \text{B}(\mathcal{G})$$

et $m_{\mathcal{H}}(\mathcal{G})$ est égale à l'image de $m_{\mathcal{H}}(V)$ par l'isomorphisme:

$$\text{B}(V)^D \xrightarrow{\sim} \text{B}(\mathcal{G})^D$$

L'isomorphisme $\Gamma(V) \xleftarrow{\sim} \Gamma(\mathcal{G})$ résulte de l'isomorphisme

$$\mathrm{III}^1(k, \mathrm{Pic} \bar{V}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{III}^1(k, \mathrm{Pic} \bar{\mathcal{G}})$$

ce dernier étant induit par les isomorphismes composés

$$H^1(k, \mathrm{Pic} \bar{V}) \approx H^1(k, \widehat{\bar{H}}) \approx H^1(k, \mathrm{Pic} \bar{\mathcal{G}})$$

Nous avons le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \prod V(k_v) & \times & \Gamma(V) \\ \downarrow & & \uparrow \approx \\ \prod \mathcal{G}(k_v) & \times & \Gamma(\mathcal{G}) \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \quad \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

dans lequel la surjectivité de la flèche de gauche provient de la proposition 4.2.1(iv). On a vu que le calcul de $m_{\mathcal{H}}(\mathcal{G})$ ne dépendait pas de la famille $(x_v)_v$ choisie dans $\prod_{v \in \Omega_k} \mathcal{G}(k_v)$.

De la même manière, on sait que le calcul de $m_{\mathcal{H}}(V)$ ne dépend pas non plus de la famille $(y_v)_v$ choisie dans $\prod_{v \in \Omega_k} V(k_v)$. Pour calculer $m_{\mathcal{H}}(V)$, on peut donc prendre pour $(y_v)_v$

n'importe quel relèvement de la famille $(x_v)_v$. On en déduit que $m_{\mathcal{H}}(\mathcal{G})$ n'est autre que l'application composée:

$$\Gamma(\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(V) \xrightarrow{m_{\mathcal{H}}(V)} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

où $m_{\mathcal{H}}(V) \in \Gamma(V)^D$ est donnée par:

$$b \longmapsto \langle (y_v)_v, b \rangle$$

Dans la suite, nous verrons l'élément $m_{\mathcal{H}}(V)$ comme un élément de $\mathrm{III}^1(k, \widehat{\bar{H}})^D$.

4.4 1/2-théorème de Tate-Poitou pour les groupes non-abéliens

Théorème 4.4.1. Soient k un corps de nombres, H un k -groupe fini, \mathcal{L}_H un k -lien localement représentable par H . L'application

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{H}} : \mathrm{III}^2(k, \mathcal{L}_H) &\longrightarrow \mathrm{III}^1(k, \widehat{\bar{H}})^D \\ [\mathcal{G}] &\longmapsto m_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}) \end{aligned}$$

où $\mathrm{III}^2(k, \mathcal{L}_H)$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence de gerbes localement liées par H admettant partout localement une section (i.e. qui sont partout localement neutres), se factorise par

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{III}^2(k, \mathcal{L}_H) & \xrightarrow{ab} & \mathrm{III}^2\left(k, \frac{\bar{H}}{[\bar{H}, \bar{H}]}\right) \\ & \searrow m_{\mathcal{H}} & \downarrow \approx \\ & & \mathrm{III}^1\left(k, \widehat{\frac{\bar{H}}{[\bar{H}, \bar{H}]}}\right)^D \end{array}$$

où ab est l'application d'abélianisation naturelle, et l'isomorphisme vertical est fourni par la dualité de Tate-Poitou.

Remarque 4.4.2.

On peut étendre le théorème 4.4.1 au cas où H est un k -groupe linéaire, *i.e.* au cas où les k -gerbes considérées ne sont plus de Deligne-Mumford. Ceci peut de faire en remplaçant dans la construction fondamentale (de la section 2) SL_n par GL_n . Le théorème 4.1 peut alors être complété par les deux résultats suivants:

1. Si H est un k -tore T , $m_{\mathcal{H}}$ prend ses valeurs dans $\text{III}^1(k, X^*(T))^D$:

$$m_{\mathcal{H}} : \text{III}^2(k, T) \longrightarrow \text{III}^1(k, X^*(T))^D$$

et coïncide avec l'isomorphisme donné par la dualité de Kottwitz pour les tores [Ko84].

2. Si H est un k -groupe semi-simple, alors $\text{III}^1(k, \widehat{\bar{H}}) = 0$ et

$$m_{\mathcal{H}} : \text{III}^2(k, \mathcal{L}_H) \longrightarrow \text{III}^1(k, \widehat{\bar{H}})^D = 0$$

est l'application nulle. On sait d'après [Bo96] dans le cas semi-simple (resp. d'après [Do76] dans le cas semi-simple simplement connexe) que toutes les classes de

$$\text{III}^2(k, \mathcal{L}_H) \quad (\text{resp. de } H^2(k, \mathcal{L}_H))$$

sont neutres. Ainsi l'obstruction de Brauer-Manin est la seule dans le cas semi-simple. Compte tenu de la remarque (1) précédente, on en déduit que le même résultat vaut dans le cas des groupes réductifs connexes, puis dans le cas des groupes connexes ([Bo93]).

Bibliography

[EGA1] A. Grothendieck, J.A. Dieudonné, *Eléments de Géométrie Algébrique I*, Springer-Verlag, 1971.

[SGA4-IV] A. Grothendieck, J-L. Verdier, *Topos*, Séminaire de Géométrie algébrique du Bois Marie 1963-64.

[SGA4-V] J-L. Verdier, *Cohomologie dans les topos*, Séminaire de Géométrie algébrique du Bois Marie 1963-64.

[SGA4-VII] A. Grothendieck, *Site et Topos étale d'un schéma*, Séminaire de Géométrie algébrique du Bois Marie 1963-64.

[SGA4-VIII] A. Grothendieck, *Foncteurs fibres, supports, étude cohomologique des morphismes finis*, Séminaire de Géométrie algébrique du Bois Marie 1963-64.

[Bo93] M. Borovoi, *Abelianization of the second non-abelian Galois cohomology*, Duke Mathematical J. **72**, 217–239, 1993.

[Bo96] M. Borovoi, *The Brauer-Manin obstructions for homogeneous spaces with connected or abelian stabilizer*, J. reine angew. Math. **473**, 181–194, 1996.

[BK97] M. Borovoi, B. Kunyavsky, *On the Hasse Principle for homogeneous spaces with finite stabilizers*, Ann. Fac. Sci. Toulouse **6** (3), 481–497, 1997.

[BK00] M. Borovoi, B. Kunyavsky, *Brauer equivalence in a homogeneous space with connected stabilizer*, Michigan Math. J. **49**, 197–205, 2000.

[Br90] L. Breen, *Bitorseurs et cohomologie non-abélienne*, issu de *The Groethendieck Festschrift I*, Progress in Mathematics **86**, p401–476, 1990.

[Br92] L. Breen, *Théorie de Schreier supérieure*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4⁰ série, t.25, 465–514, 1992.

[Br94a] L. Breen, *On the classification of 2-gerbes and 2-stacks*, SMF, Astérisque **225**, 1994.

[Br94b] L. Breen, *Tannakian Categories*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, volume **55**, part I, 1994.

[CE56] H. Cartan, S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press, 1956.

[CG66] J.W.S. Cassels, M.J.T. Guy, *On the Hasse principle for cubic surfaces*, Mathematika, volume 13, part 2, 1966.

[CTGP03] J-L. Colliot-Thélène, P. Gille, R. Parimala *Arithmetic of linear algebraic groups over two-dimensional geometric fields*, www.mathematik.uni-bielefeld.de/log/man/107.html.

[CTS87] J-L. Colliot-Thélène, J-J. Sansuc, *La descente sur les variétés rationnelles, II*, Duke Mathematical Journal, vol. **54**, n.2, 375–492, 1987.

[CTCS80] J-L. Colliot-Thélène, D. Coray, J-J. Sansuc, *Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles*, J. reine angew. Math. **320**, 150–191, 1980.

[DD87] P. Dèbes, J-C. Douai, *Gerbes and covers*, Communications in Algebra, **27**(2), 577–594, 1999.

[DD97] P. Dèbes, J-C. Douai, *Algebraic covers: field of moduli versus field of definition*, Ann. Scient. ENS, t.**30**, 303–338, 1997.

[DDM01] P. Dèbes, J-C. Douai, L. Moret-Bailly, *Descent varieties for algebraic covers*, 2001.

[Del90] P. Deligne, *Catégories Tannakiennes*, extrait de *The Grothendieck Festschrift II*, Progress in Math. **87**, 111–195, Birkhauser, 1990.

[DM69] P. Deligne, D. Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Publications Mathématiques de l'I.H.E.S., **36**, 75–109, 1969.

[Dem64] M. Demazure, *Automorphismes des groupes réductifs*, SGA, exposé XXIV, 1964.

[DF93] F.R. Demeyer, T.J. Ford, *On the Brauer group of toric varieties*, Trans. AMS, vol. **335**, 559–575, 1993.

[Do76] J-C. Douai, *2-cohomologie galoisienne des groupes semi-simples*, Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Techniques de Lille, 1976.

[Do87] J-C. Douai, *Le théorème de Tate-Poitou pour les corps de fonctions des courbes définies sur les corps de séries formelles en une variable sur un corps algébriquement clos*, Comm. in Algebra **15** (11), 2379–2390, 1987.

[Do95] J-C. Douai, *Espaces homogènes et arithmétique des schémas en groupes réductifs sur les anneaux des Dedekind*, Journal de théorie des Nombres de Bordeaux **7**, 21–26, 1995.

[Do01] J-C. Douai, *Descente, champs et gerbes de Hurwitz*, Séminaire et Congrès **5**, SMF, 119–131, 2001.

[DEZ03] J-C. Douai, M. Emsalem, S. Zahnd, *Variétés de descente, gerbes et obstruction de Brauer-Manin*, arXiv:mathAG/0303231 v1, mar 2003.

[EHKV01] D. Edidin, B. Hassett, A. Kresch, A. Vistoli, *Brauer groups and quotient stacks*, American Journal of Mathematics **123**, 761–777, 2001.

[FI73] R. Fossum, B. Iversen, *On Picard Groups of algebraic fibre spaces*, Journal of Pure and Applied Algebra 3, 269–280, 1973.

[Fu98] W. Fulton, *Intersection theory*, Second Edition, Springer, 1998.

[Ga80] O. Gabber, *Some theorems on Azumaya algebras*, dans *The Brauer Group (Les Plans-sur-Bex, 1980)*, LNM **844**, Springer-Verlag, 1980.

[GH78] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, J. Wiley and sons, 1978.

[Gi66] J. Giraud, *Cohomologie non-abélienne*, Thèse, Columbia University, 1966.

[Gi68] J. Giraud, *Analysis situs*, dans *10 Exposés sur la cohomologie des schémas*, Advanced Studies in Pure Mathematics, Masson et Cie, Paris, 1968.

[Gi71] J. Giraud, *Cohomologie non-abélienne*, Springer-Verlag, 1971.

[Gr55] A. Grothendieck, *A general theory of fibre spaces with structure sheaf*, University of Kansas, 1955.

[Gr58] A. Grothendieck, *La théorie des classes de Chern*, Bull. Soc. Math. **86**, 137–154, 1958.

[Gr68] A. Grothendieck, *Le groupe de Brauer I, II et III*, dans *10 Exposés sur la cohomologie des schémas*, Advanced Studies in Pure Mathematics, Masson et Cie, Paris, 1968.

[Gr02] A. Grothendieck, *Les déivateurs*, Ch. XI, Edition des Universités de Montpellier II et Paris VII, 2002.

[Ha02] D. Harari, *Groupes algébriques et points rationnels*, Math. Ann. **322**, 811–826, 2002.

- [HS02] D. Harari, A.N. Skorobogatov, *Non-abelian cohomology and rational points*, Compositio Mathematica **130**, 241–273, 2002.
- [Har92] J. Harris, *Algebraic Geometry*, Springer, vol. 133, 1992.
- [Hart77] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, vol. 52, 1977.
- [Hi03] N. Hitchin, *What is a gerbe?*, Notices of the AMS, volume 50, number 2, 218–219, February 2003.
- [Ho72] R.T. Hoobler, *Brauer groups of abelian schemes*, Ann. Scient. ENS, t.5, 45–70, 1972.
- [J96] N. Jacobson, *Finite-dimensional division algebras over fields*, Springer, 1996.
- [Ja00] J. Jahnel, *The Brauer-Severi variety associated with a central simple algebra: a survey*, <http://www.uni-math.gdwg.de/jahnel>, 2000.
- [KO74] M-A. Knus, M. Ojanguren, *Théorie de la descente et algèbres d’Azumaya*, LNM **389**, Springer-Verlag, 1974.
- [Ko84] R.E. Kottwitz, *Stable trace formula: cuspidal tempered terms*, Duke Math. J. **51**, 3, 611–650, 1984.
- [KV03] A. Kresch, A. Vistoli, *On coverings of Deligne-Mumford stacks and surjectivity of the Brauer map*, arXiv:mathAG/0301249 v1, jan. 2003.
- [La91] S.Lang, *Number Theory III*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences vol. 60, Springer-Verlag, 1991.
- [LMB00] G. Laumon, L. Moret-Bailly, *Champs algébriques*, Springer-Verlag, 2000.
- [Mac84] J. Mac Cleary, *User’s guide to spectral sequences*, Mathematics Lecture Series **12**, Publish or Perish, 1984.
- [Ma70] Y. Manin, *Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne*, Actes, Congrès intern. math., tome 1, 401–411, 1970.
- [Ma74] Y. Manin, *Cubic forms*, North-Holland Publishing Company, 1974.
- [Me91] A.S. Merkurjev, *Kaplansky conjecture in the theory of quadratic forms*, Journal of Soviet Math., 57, 3489–3497, 1991.
- [Mi80] J-S. Milne, *Etale Cohomology*, Princeton University Press, 1980.
- [MB02] L. Moret-Bailly, *Sur la R-équivalence de torseurs sous un groupe fini*, arXiv: math.AG/0203151 v2, sep. 2002.

- [No02] B. Noohi, *Fundamental groups of algebraic stacks*, arXiv: math.AG/0201021 v1, jan. 2002.
- [Po99] B. Poonen, *An explicit algebraic family of genus-one curves violating the Hasse principle*, arXiv: math.AG/9910124 v1, oct. 1999.
- [Sa81] J-J. Sansuc, *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, J. reine angew. Math. **327**, 12–80, 1981.
- [SW95] P. Sarnak, L. Wang, *Some hypersurfaces in \mathbb{P}^4 and the Hasse principle*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 321, Série I, 319–322, 1995.
- [SS58] A. Schinzel, W. Sierpiński, *Sur certaines hypothèses concernant les nombres premiers*, Acta Arithmetica, IV-1, 185–208, 1958.
- [Sc01] S. Schroer, *There are enough Azumaya algebras on surfaces*, arXiv:mathAG/0003229 v2, avr 2001.
- [Se68] J-P. Serre, *Corps locaux*, Hermann, 1968.
- [Se70] J-P. Serre, *Cours d’Arithmétique*, PUF, 1970.
- [Se73] J-P. Serre, *Cohomologie Galoisiennne*, LNM **5**, 1973.
- [Sh72] S.S. Shatz, *Profinite groups, Arithmetic, and Geometry*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1972.
- [SSk03] S. Siksek, A. Skorobogatov, *On a Shimura curve that is a counterexample to the Hasse principle*, Bull. London Math. Soc. **135**, 409–414, 2003.
- [Sk99] A. Skorobogatov, *Beyond the Manin obstruction*, Invent. Math. **135**, 399–424, 1999.
- [Sp66] T.A. Springer, *Nonabelian H^2 in Galois cohomology*, Proc. Symp. Pure Mathematics, AMS, IX, 164–182, 1966.
- [Sw62] H.P.F. Swinnerton-Dyer, *Two special cubic surfaces*, Mathematika **9**, 54–56, 1962.
- [Tam94] G. Tamme, *Introduction to Etale Cohomology*, Springer-Verlag, Universitext, 1994.
- [Tat66] J. Tate, *The cohomology groups of tori in finite Galois extensions of number fields*, Nagoya Mathematical Journal, vol. 27 (1), 709–719, 1966.
- [Vi89] A. Vistoli, *Intersection theory on algebraic stacks and on their moduli spaces*, Inventiones Mathematicae **97**, 613–670, 1989.

Glossaire des notations

$\mathrm{Br}_{A_Z} X$, groupe de Brauer-Azumaya de X , XI

$\mathrm{Br} X$, groupe de Brauer cohomologique de X , XI

$S_{\text{ét}}$, site étale de S , 5

$\mathbb{G}_{a,S}$, groupe additif de S , 6

$\mathbb{G}_{m,S}$, groupe multiplicatif de X , 6

$\mu_{n,S}$, faisceau des racines n^{èmes} de l'unité sur S , 7

$\widetilde{S}_{\text{ét}}$, topos étale de S , 8

$\mathrm{ad}_{G_S}(P)$, faisceau des automorphismes du G_S -torseur P , 8

$Tors(S, G_S)$, catégorie des G_S -torseurs sur le site étale de S , 9

$Bitors(S; H_S, G_S)$, catégorie des (H_S, G_S) -bitorseurs sur le site étale de S , 14

$\mathrm{Tors}(k, G)$, gerbe des G -torseurs sur le site étale de k , 20

$\mathrm{Asc}(k, n)$, gerbe des algèbres simples centrales d'indice n sur le site étale de k , 21

$\mathrm{SB}(k, n - 1)$, gerbe des k -variétés de Severi-Brauer de dimension $n - 1$, 21

$\mathrm{Tors}(S, G_S)$, gerbe des G_S -torseurs sur le site étale de S , 21

$\mathrm{LBun}(S)$, gerbe des fibrés en droites sur le site étale de S , 24

$\mathrm{VBun}(n, S)$, gerbe des fibrés vectoriels de rang n sur le site étale de S , 24

$\mathrm{Az}(n, S)$, gerbe des algèbres d'Azumaya d'indice n sur le site étale de S , 24

$D(\bar{P})$, k -gerbe des modèles de \bar{P} , 25

$\partial(\lambda_{\bar{P}})$, gerbe associée au type $\lambda_{\bar{P}}$, 26

(FAGR/S) , champ des faisceaux de groupes sur le site étale de S , 30

$FAGR(S')$, catégorie des faisceaux de groupes sur le site étale de S' , 30

(Lien/S) , préchamp des liens sur le site étale de S , 30

(LIEN/S) , champ des liens sur le site étale de S , 30

lien G , lien représenté par G , 30

$H^2(S, \mathcal{L})$, ensemble des classes d'équivalence de S -gerbes de lien \mathcal{L} , 33

$R^1\pi_* G_X$, premier foncteur dérivé à droite du faisceau $\pi_* G_X$, 41

$H^2(X, G_X)^{tr}$, partie transgressive de $H^2(X, G_X)$, 42

$\mathrm{Br}^{alg} X$, groupe de Brauer transgressif de X , 44

$\mathrm{Br}_a X$, groupe de Brauer transgressif de X modulo les constantes, 45

$\Sigma(X)$, noyau de $\mathrm{Br}_a X \rightarrow \prod_{v \in \Omega_k} \mathrm{Br}_a(X \otimes_k k_v)$, 45

$\mathrm{III}^1(k, \mathrm{Pic} \bar{X})$, noyau de $H^1(k, \mathrm{Pic} \bar{X}) \rightarrow \prod_{v \in \Omega_k} H^1(k_v, \mathrm{Pic} \bar{X})$, 45

$m_H(X)$, obstruction de Brauer-Manin de X , 45

Ω_k , ensemble des places du corps de nombres k , 54

\mathbb{A}_k , anneau des adèles du corps de nombres k , 54

$X(\mathbb{A}_k)$, ensemble des points adéliques de X , 54

inv_v , invariant local, 56

$x_v^* b$, image inverse d'une algèbre d'Azumaya par un k_v -point, 57

$\mathrm{III}^2(k, \bar{H})$, noyau de $H^2(k, \bar{H}) \rightarrow \prod_{v \in \Omega_k} H^2(k_v, \bar{H})$, 60

$m_{\mathcal{H}}(\mathcal{G})$, obstruction de Brauer-Manin de la gerbe \mathcal{G} , 61

$X(\mathbb{A}_k)^B$, points adéliques de X Brauer-Manin orthogonaux à B , 61

$\mathrm{Br}_\lambda X$, partie de $\mathrm{Br} X$ associée au type λ , 63

$\mathrm{Br} \mathcal{G}$, groupe de Brauer de la gerbe \mathcal{G} , 87

RÉSUMÉ

Soient k un corps de caractéristique nulle et G un k -groupe algébrique linéaire. Il est bien connu que si G est abélien, les torseurs sous G_X sur un k -schéma $\pi : X \rightarrow \text{Spec } k$ fournissent une obstruction à l'existence de points k -rationnels sur X , puisque la suite spectrale de Leray:

$$R^p \underline{\Gamma}_k (R^q \pi_* G_X) \Longrightarrow R^{p+q} \underline{\Gamma}_X (G_X)$$

donne dans les bons cas (*e.g.* X propre) une suite exacte de groupes:

$$0 \longrightarrow H^1(k, G) \longrightarrow H^1(X, G_X) \xrightarrow{u} H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \xrightarrow{\delta^1} H^2(k, G) \longrightarrow H^2(X, G_X)$$

sur laquelle on peut directement lire l'obstruction à ce qu'un \bar{G}_X -torseur $\bar{P} \rightarrow \bar{X}$ de corps des modules k soit défini sur k , *i.e.* qu'il provienne par extension des scalaires à la clôture algébrique \bar{k} de k d'un G_X -torseur $P \rightarrow X$. Le point crucial est que cette obstruction est mesurée par une gerbe, qui est neutre lorsque X possède un point k -rationnel. On essaye ici d'étendre ce résultat au cas non-commutatif, et on en déduit (sous certaines conditions) des obstructions cohomologiques non-abéliennes à l'existence de points k -rationnels sur X , et des résultats sur la descente des torseurs.

Mots-clés. Points rationnels, (bi-)torseurs, champs, gerbes, cohomologie non-abélienne, obstruction de Brauer-Manin.

ABSTRACT

Let k be a field of characteristic 0 and G a linear algebraic k -group. When G is abelian, it is well known that torsors under G_X over a k -scheme $\pi : X \rightarrow \text{Spec } k$ provide an obstruction to the existence of k -rational points on X , since Leray spectral sequence:

$$R^p \underline{\Gamma}_k (R^q \pi_* G_X) \Longrightarrow R^{p+q} \underline{\Gamma}_X (G_X)$$

gives rise (when X is “nice”, *e.g.* X smooth and proper) to an exact sequence of groups:

$$0 \longrightarrow H^1(k, G) \longrightarrow H^1(X, G_X) \xrightarrow{u} H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \xrightarrow{\delta^1} H^2(k, G) \longrightarrow H^2(X, G_X)$$

This sequence gives an obstruction for a \bar{G}_X -torsor $\bar{P} \rightarrow \bar{X}$ with field of moduli k to be defined over k , *i.e.* to be obtained by extension of scalars to the algebraic closure \bar{k} of k from a G_X -torsor $P \rightarrow X$. This obstruction is measured by a gerbe, which is neutral if X possesses a k -rational point. We try to extend this result to the non-commutative case, and in some cases, we deduce non-abelian cohomological obstruction to the existence of k -rational points on X , and results about descent of torsors.

Keywords. Rational points, (bi-)torsors, stacks, gerbes, non-abelian cohomology, Brauer-Manin obstruction.